Trabajo Práctico 2

Cálculo I
1er semestre 2007

En este trabajo práctico ejercitaremos nuestra comprensión de las desigualdades y las inecuaciones. Para ello, serán útiles las siguientes propiedades fundamentales del orden de los números reales:

Tricotomía: Si a y b son dos números reales, entonces una y sólo una de las siguientes expresiones es verdadera

$$a < b \qquad a = b \qquad a > b$$

Transitividad: Sean a, b, c tres números reales. Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

Orden de la adición: Sean a, b, c tres números reales. Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.

Orden de la multiplicación: Sean a, b, c tres números reales.

- Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.
- Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.

También se definen las desigualdades no-estrictas siguientes: Se dice que a es menor o igual a b, y se denota por $a \leq b$, si y sólo si $a < b$ o $a = b$. Y análogamente, se dice que a es mayor o igual a b, y se denota por $a \geq b$ si y sólo si $a > b$ o $a = b$. Es obvio que $a \geq b$ si y sólo si $b \leq a$. También valen las siguientes propiedades:

Igualdad: Si a y b son números reales, entonces

$$a \leq b \quad \text{y} \quad a \geq b \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = b$$

Transitividad: Sean a, b, c tres números reales. Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.

Orden de la adición: Sean a, b, c tres números reales. Si $a \leq b$, entonces $a + c \leq b + c$.

Orden de la multiplicación: Sean a, b, c tres números reales.

- Si $a \leq b$ y $c > 0$, entonces $ac \leq bc$.
- Si $a \leq b$ y $c < 0$, entonces $ac \geq bc$.

---

(1) Hallar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones y representar gráficamente:

(a) $x + 5 > 17$ (b) $x + 6 \leq -7$ (c) $3x > -21$

(d) $3x + 5 \geq 17$ (e) $2x + 7 \leq 5 - 6x$ (f) $3(x - 1) \geq 2(x - 1)$

(g) $\dfrac{x}{2} - 5 > \dfrac{1}{4}x + 3$ (h) $\dfrac{2 - x}{5} \geq 0$ (i) $\dfrac{3}{4}x + 2 < \dfrac{5x}{8} - 3$

(j) $-\dfrac{3}{5}x - 6 < -\dfrac{2}{5}x + 7$ (k) $\dfrac{1}{x} < 0$ (ℓ) $-\dfrac{2}{x + 1} > 0$

(m) $(x - 1)(x + 1) > 0$ (n) $(x - 7)(x - 8) \leq 0$ (ñ) $(x - 3)(x + 5) < 0$

(2) Demostrar las siguientes propiedades:

(a) Sean a y b dos números reales. Si $a < b$, entonces $a \leq b$.
(b) Sean a, b y c tres números reales. Si $a < b$, y $b < c$, entonces $a < c$.
(c) Sean a, b y c tres números reales. Si $a \leq b$, y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.
(d) Sean a, b y c tres números reales. Si $a < b$ y $b \leq c$, entonces $a < c$.

(3) Clasificar cada expresión como verdadera o falsa. Si es verdadera, demostrar, si es falsa, hallar un (contra)ejemplo para el que la expresión no sea verdadera.

(a) Si $x > 1$ e $y > 2$, entonces $x + y > 3$. (b) Si a es un número real, entonces $-a$ es negativo

(c) Si a es un número real, entonces $a^2 > 0$ (d) Si $x < 2$ entonces x es negativo.

(e) Si x es negativo, entonces $x < 2$. (f) Si $0 < x$, entonces $-x < 0$.

(g) Si $x < 5$ e $y < 6$, entonces $xy < 30$. (h) Si $x < y < -2$, entonces $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$.

(i) Si $a > 1$, entonces $a < a^2$. (j) Si $0 < a < 1$, entonces $a^2 < a$.

(k) Si $0 < x$, entonces $x < x^2$. (l) Si $x \leq -5$, entonces $x - 2 \leq -7$.

(m) Si $x \leq y$ e $y < z$, entonces $x < z$. (n) Si $a < b < 0$ y $c < d < 0$, entonces $ac > bd$.

(4) Resolver para x y graficar el conjunto solución.

(a) $3x + 5 \neq 8$ (b) $2x + 1 \not> 5$ (c) $12x + 9 \neq 15(x - 2)$

(d) $3(x - 1) \not< 5(x + 2)$ (e) $x + 2 \not> \frac{3}{4}$ (f) $\frac{2}{9}(3x + 7) \not\geq 1 - \frac{4x}{3}$

(5) Representar gráficamente los siguientes intervalos, y describirlos como conjunto utilizando desigualdades (por ejemplo: $[-3/2, 2) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3/2 \leq x < 2\}$)

(a) $(-3, -1)$ (b) $(-3, -1]$ (c) $[-3, 1)$ (d) $[-2{,}5, 4]$

(e) $[0, 5]$ (f) $(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}]$ (g) $(-\infty, 1)$ (h) $[4, \infty)$

(6) Expresar cada conjunto en notación de intervalos

(a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x \leq 2\}$ (b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 7\}$ (c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -6 \leq x < 0\}$

(d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 4\}$ (e) $\{x \in \mathbb{R} \mid -10 < x < 10\}$ (f) $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 7\}$

(g) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$ (h) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$

(7) Expresar el resultado de la operación como un conjunto

(a) $(-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$ (b) $(-\infty, 0) \cup [4, +\infty)$ (c) $(-\infty, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

(8) Expresar el resultado de la operación como un único intervalo (si se puede)

(a) $(-2, 3] \cup [1, 4]$ (b) $(0, 1) \cup (-1, 1]$ (c) $(-2, 3] \cap [1, 4]$

(d) $(0, 1) \cap (-1, 1]$ (e) $(-\infty, 2) \cap (-1, +\infty)$ (f) $[2, +\infty) \cup [3, +\infty)$

(g) $(-\infty, 2) \cup (-1, +\infty)$ (h) $[2, +\infty) \cap [3, +\infty)$

(9) Demostrar las siguientes afirmaciones

(a) Si $x < -1$ entonces $2x + 3 < 1$

(b) Si $x > 2$ entonces $\frac{1}{5x - 4} < \frac{1}{6}$

(c) Si $n \in \mathbb{N}$ entonces $\frac{1}{n} \leq 1$

(d) Si $n \in \mathbb{N}$ entonces $\frac{1}{n + 3} < \frac{1}{n}$

(e) Si $a > 0$ y $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, entonces $\frac{1}{x^2 + a} < \frac{1}{x^2}$

(f) Si $n \geq 4$ entonces $\frac{1}{n^2 - 3n + 12} \leq \frac{1}{n}$

(g) Si $n \geq 10$ entonces $\frac{1}{n^2 - 3n + 12} < \frac{1}{20}$

(h) Si $x > 1$ entonces $\frac{1}{x^2} < \frac{1}{x}$

(i) Si $n > 9$ entonces $\frac{5n + 3}{\frac{1}{3}n^2} < \frac{24}{n}$

(10) Se dice que un conjunto A tiene *máximo*, si existe un número m que satisface: $m \in A$, y $m \geq a$ para todo $a \in A$. En ese caso, se escribe $m = \max(A)$. En los siguientes ejemplos, hallar $\max(A)$ (y demostrar)

(a) $A = \{-5, 8, 0, 3/4, -25\}$

(b) $A = [0, \pi]$

(c) $A = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\}$

(d) $A = \mathbb{N}$

(e) $A = (0, 1)$