Trabajo Práctico 7 *Cálculo I*
1er semestre 2007

---

(1) Escribir los primeros diez términos de las siguientes sucesiones

(a) $a_n = n^2$ (b) $b_n = (-2)^n$ (c) $c_n = |(-1)^n|$ (d) $d_n = \dfrac{1}{n}$ (e) $e_n = 4$

(f) $f_n = 2n - 1$ (g) $g_n = 2n$ (h) $h_n = a_{f_n}$ (i) $i_n = a_{g_n}$ (j) $j_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$

(k) $k_n = 1 - \dfrac{1}{2^n}$ (ℓ) $\ell_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^i$ (m) $x_n = d_{n+5}$ (n) $y_n = \dfrac{n-1}{n}$ (ñ) $z_n = \begin{cases} a_n & \text{si } n < 4 \\ k_n & \text{si } n \geq 4 \end{cases}$

(2) Demostrar utilizando la definición de límite, que las siguientes proposiciones son verdaderas

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^3 - n^2} = 0$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3}{n^3 - n^2} = 1$ (c) $\lim\limits_{n\to\infty} n \neq 0$ (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^{3/2} + 1} = 0$ (f) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$ (g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4}{n^3 - n^2} \neq 1$ (h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4}{n^4 - n^2} = 1$

Ayuda: en (f) multiplicar y dividir por $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$

(3) Demostrar que si $a \in \mathbb{R}$ y se define $a_n = a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

(4) Demostrar que si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |\ell|$. Ayuda: usar que $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$.

(5) Demostrar que si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$ y definimos $b_n = a_{n+5}$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \ell$.

(6) Sea $p \in \mathbb{N}$ y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$. Demostrar que si definimos $b_n = a_{n+p}$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \ell$.

Es decir: *"El límite de una sucesión no cambia si eliminamos un número finito de términos"*

(7) Sea $p \in \mathbb{N}$ y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$. Demostrar que si definimos

$$b_n = \begin{cases} \alpha_1, & \text{si } n = 1 \\ \alpha_2, & \text{si } n = 2 \\ \vdots & \\ \alpha_p, & \text{si } n = p \\ a_n, & \text{si } n > p \end{cases}$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ cualesquiera números reales, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \ell$.

Es decir: *"El límite de una sucesión no cambia si cambiamos el valor de un número finito de términos"*

(8) Demostrar que si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$ y definimos $b_n = a_n + \alpha$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \ell + \alpha$.

(9) Demostrar que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente y $c \in \mathbb{R}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} (c\, a_n) = c \lim_{n\to\infty} a_n$$

(10) Demostrar que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son convergentes, entonces

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n.$$

(Ayuda: Se puede usar el resultado que se conoce para la suma y el problema anterior tomando $c = -1$.)

(11) Calcular los siguientes límites (utilizando las propiedades y los límites conocidos)

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10}{n} + \dfrac{1000}{n}$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n+1}$ (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n^2 + n}$ (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^{10}}$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^2$ (f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1/n^2}{1/n}$ (g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1/n^3}{1/n^4}$ (h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1/\sqrt{n}}{2/\sqrt{n}}$

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1024 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{256 + \frac{1}{n^3}}$ (j) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 + n + 1024}{3n^3 - 123n^2 - 789n + 2048}$ (k) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

(12) Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles no. En caso afirmativo, dar una demostración (utilizando los resultados demostrados en clase y los ejercicios (9) y (10). En caso negativo, dar un contraejemplo.

- Si $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son convergentes.
- Si $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.
- Si $(a_n\, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son convergentes.
- Si $(a_n\, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.
- Si $(a_n\, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente con límite distinto de cero, entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.
- Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, entonces $\left(a_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.
- Si $\left(a_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.
- Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0$.
- Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y $a_n < b$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < b$.
- Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente con límite cero, y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, entonces $(a_n\, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente con límite cero.
- Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente con límite cero, y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, entonces $(a_n/b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente con límite cero.

(13) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de términos no-negativos, y sea a su límite. Demostrar que $a \geq 0$ y que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$. (Demostrar por separado el caso en que $a = 0$ y $a \neq 0$)

(14) Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - \ell) = 0$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - \ell| = 0$