Trabajo Práctico 9

Cálculo I
1er semestre 2007

---

(1) Decir cuánto valen los siguientes límites (justificar):

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2}\right)^n$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} (-3)^n$ (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^8$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2}\right)^{1/n}$ (f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^8}$ (g) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{4+(-1)^n}$ (h) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n^5}}$

(2) Dar ejemplos de sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que satisfagan

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 2$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 100$ (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0$ (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = +\infty$

(3) Demostrar el siguiente resultado:

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión *acotada* de términos positivos tal que existe $r > 0$ que satisface

$$r < a_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. (Ayuda: usar el teorema del emparedado)

(4) Demostrar:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n} = 1$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2-n} = 1$ (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^3+2n^2+2n+1} = 1$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^3-4n^2+6n-3} = 1$

(5) Calcular (justificar):

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n}$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+1}$ (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n-2}$ (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+3}$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+2^n}$ (f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n+3^n}$ (g) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n}$

(6) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente con límite a. Demostrar que:

(a) si $a > 1$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^n = +\infty$

(b) si $a < -1$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^n = \infty$

(c) si $|a| < 1$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^n = 0$

(Ayuda para (a) si $a > 1$, entonces existe $\ell > 1$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $a_n \geq \ell$ para todo $n \geq n_0$.)

(7) Utilizando el ejercicio anterior, calcular los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2^n}$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n}{n^{25}}$ (c) $\lim\limits_{n\to\infty} n^4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ (d) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-4}(1{,}1)^n$

(8) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $a_n \neq 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$, con $|\ell| < 1$. Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.