Trabajo Práctico 10 *Cálculo I*
1er semestre 2007

---

(1) Decir cuál es el supremo de los siguientes conjuntos y demostrar:

(a) $\{-1+\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ (b) $\{3-\frac{4}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ (c) $(0,5)$

(2) Demostrar que si s es una cota superior de A y si existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}$, que satisface $\lim_{n\to\infty} x_n = s$, entonces $s = \sup(A)$.

(3) Para las siguientes sucesiones, decir cuáles son crecientes, cuáles estrictamente crecientes, cuáles decrecientes, cuáles estrictamente decrecientes y cuáles acotadas (demostrar).

(a) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ (b) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ (c) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$ (d) $a_n = \dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}$

(4) Demostrar que la sucesión dada por es $a_1 = \sqrt{5}$, $a_{n+1} = \sqrt{5+a_n}$ convergente y calcular su límite.

(5) Hallar los límites de las sucesiones dadas por

(a) $a_n = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$ (b) $a_n = \left(\dfrac{2n+1}{2n+3}\right)^n$ (c) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{4n+1}$

(d) $a_n = \left(\dfrac{3n+4}{3n+2}\right)^{2n+1}$ (e) $a_n = \left(1+\dfrac{a}{n}\right)^{b\,n}$ (f) $a_n = \left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n$

(g) $a_n = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ (h) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ (i) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$

(6) Demostrar que si $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, entonces la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, dada por $f(x) = a^x$ es biyectiva (si $a > 1$ copiarse —sin pudor— la proposición 3.20 poniendo a donde aparezca e; si $0 < a < 1$, usar que $1/a > 1$ y la cabeza)

(7) Para $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, denotemos por $\log_a : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ la inversa de $f(x) = a^x$. Demostrar que

(*a*) $x = \log_a(a^x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
(*b*) $x = a^{\log_a(x)}$ para todo $x \in \mathbb{R}_{>0}$.
(*c*) $\log_a(x\cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$, para $x, y > 0$.
(*d*) $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x)$, para $x > 0$ e $y \in \mathbb{R}$.
(*e*) $a^x = e^{x\ln(a)}$, para $x \in \mathbb{R}$.
(*f*) Si $b > 0$, $b \neq 1$, $\log_b(x) = \dfrac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$, para todo $x \in \mathbb{R}_{>0}$. (Fórmula del cambio de base).
(*g*) Si $a > 1$ y $0 < x < y$, entonces $\log_a(x) < \log_a(y)$.
(*h*) Si $0 < a < 1$ y $0 < x < y$, entonces $\log_a(x) > \log_a(y)$.

(8) Calcular:

(a) $\log_{10}(100)$ (b) $\log_2(1/2)$ (c) $\ln(e)$ (d) $\log_4(64)$ (e) $\log_2(0,0625)$
(f) $\log_2(10)$ (g) $\log_4(40)$ (h) $\log_1(20)$ (i) $\log_{35}(42875)$

(9) Trazar sobre un mismo par de ejes coordenados las gráficas de las siguientes funciones

(*a*) $f(x) = \log_{10}(x)$, $g(x) = \log_{10}(x) - 2$ y $h(x) = \log_{10}(x-2)$;
(*b*) $f(x) = \log_{10}(x)$, $g(x) = \log_{10}(2x)$ y $h(x) = 2\log_{10}(x)$;
(*c*) $f(x) = \log_2(x)$, $g(x) = \ln(x)$ y $h(x) = 2\log_{10}(x)$;

(10) Calcular los límites de las sucesiones dadas por:

(a) $a_n = \left(\dfrac{2n^2+3n-1}{3n^2-6n+1}\right)^{2n}$ (b) $a_n = \left(\dfrac{3n+4}{2n+5}\right)^{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$ (c) $a_n = \dfrac{\ln(n)}{n}$

(11) Probar que si $a > 0$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1) = \ln(a).$$

(12) Probar que si $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} \ln(a_n) = -\infty$.

(13) Probar que si $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} \ln(a_n) = +\infty$.

(14) Probar que si $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, con $b > 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = +\infty$.

(15) Probar que si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, con $a > 1$, y $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = +\infty$.