Trabajo Práctico 12 *Cálculo I* *1er semestre 2007*

---

(1) Probar que si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente, entonces para todo número real c también converge la serie $\sum_{k=1}^{\infty} c\, a_k$ y además

$$\sum_{k=1}^{\infty} c\, a_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

(2) Probar que si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y la serie $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ convergen, entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k + b_k\big)$ converge y además

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k + b_k\big) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

(3) Probar que las siguientes series no son convergentes:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n+3}{n^2+1}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

(4) Probar que las siguientes series son convergentes y hallar su suma:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\, 3^{n+2}\, 7}{5^{2n-3}}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{3^n}{4^{2n+1}}$

(Ayuda: utilizar la serie geométrica y el ejercicio 1)

(5) Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ para:

(a) $a_n = \dfrac{3^n}{n\, 2^n}$ (b) $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$ (c) $a_n = \dfrac{2n+1}{5^n}$ (d) $a_n = \dfrac{n}{2n^2-1}$

(e) $a_n = \dfrac{1}{\ln n}$ (f) $a_n = e^{-n}$ (g) $a_n = \dfrac{(2n+1)^n}{(3n-1)^n}$ (h) $a_n = \dfrac{2^n+n}{5^n}$

(i) $a_n = \dfrac{n}{2^n+n^2}$ (j) $a_n = \dfrac{2n!}{n^n}$ (k) $a_n = \dfrac{n^3}{n!}$ (ℓ) $a_n = \dfrac{(2n+3)\, 3^n}{n!}$

(m) $a_n = \dfrac{2n}{3n^2-n+2}$ (n) $a_n = \dfrac{(5^n+n^2)\, n!}{2^n\, n}$

(Ayuda: utilizar criterio de comparación con la serie geométrica)

(6) Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ para:

(a) $a_n = \dfrac{n+3}{2n^3-1}$ (b) $a_n = \dfrac{n^2+\sqrt{n}}{2n^4-1}$ (c) $a_n = \dfrac{7n^2+3}{3n^2-7}$

(Ayuda: utilizar criterio de comparación con la serie armónica generalizada)

(7) Probar que si $0 \le a_n \le b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge y

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

(8) Estudiar la convergencia y convergencia absoluta de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ para:

(a) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$ (b) $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{n+1}{n}$ (c) $a_n = (-1)^n \dfrac{n^2-2n-1}{n!}$ (d) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$

(9) (a) Sea $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que satisface las hipótesis del criterio de Leibniz. Probar que para todo $k \in \mathbb{N}$ es:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n - \sum_{n=1}^{k} (-1)^{n+1} a_n \right| < a_k.$$

(b) Verificar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{6n}$ es convergente y calcular su suma con error menor que 10^{-3}.

(10) Estudiar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ para:

(a) $a_n = \dfrac{n}{n^3+1}$ (b) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n^2-n}}$ (c) $a_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

(d) $a_n = \dfrac{1}{2+3^{-n}}$ (e) $a_n = ne^{-n^2}$ (f) $a_n = \left(\dfrac{3n^2+n-6}{3n(n+1)}\right)^n$

(g) $a_n = \dfrac{n!}{(n+2)!}$ (h) $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$ (i) $a_n = \dfrac{11}{1+100^{-n}}$

(j) $a_n = \dfrac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}$ (k) $a_n = \dfrac{n!(2n)!}{3\,n!}$ (ℓ) $a_n = \dfrac{1}{n!}$

(Estos van sin ayuda, pensar qué criterio se puede usar en cada caso)

(11) Considerar la serie

$$\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \cdots$$

que se obtiene mediante un reordenamiento de la serie geométrica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

(a) Usar el criterio de la raíz para demostrar que la serie converge.

(b) ¿Qué ocurre al aplicar el criterio del cociente?

(12) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números enteros tal que $0 \le a_n \le 9$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9-a_n}{10^n}\right) - 1.$$

(13) Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones acotadas tales que $a_n \le b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $a_k < b_k$ para un cierto $k \in \mathbb{N}$. Probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{10^n}$$

(Ayuda: si S_n y S'_n son las respectivas sumas parciales, entonces $S'_n - S_n > b_k - a_k > 0$ para todo $n \ge k$).

(14) Sea $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ con $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números enteros tal que $0 \le a_n \le 9$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que

$$0 \le x - \sum_{n=0}^{k} \frac{a_n}{10^n} < \frac{1}{10^k}, \qquad \text{para } k \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, si se considera $x = 0.a_1a_2\ldots a_k$, el error que se comete es menor que 10^{-k} (considerar x igual a ese número se dice que es tomar x con k cifras decimales exactas).

(15) Sean a y b números reales mayores que cero. Mirando las demostraciones de las proposiciones 3.8, 3.9 y 3.10, deducir cuántas cifras decimales exactas de a y de b basta tomar para que al calcular $a+b$ y $a\cdot b$, el error cometido sea menor que 10^{-3}.