Trabajo Práctico 4 *Ecuaciones en Derivadas Parciales*

---

(1) La ley de Torricelly dice que (bajo ciertas circunstancias ideales) un recipiente cilíndrico perderá fluido por un agujero en la base, a una tasa proporcional a la raíz cuadrada de la altura de la superficie del fluido. Supongamos que un contenedor cilíndrico está inicialmente lleno a una altura de 25cm. Si le lleva un minuto *perder* tres cuartos del total. ¿Cuánto le llevará perder el total del fluido?

---

(2) Resolver las siguientes ecuaciones lineales de primer orden, sujetas a las condiciones iniciales indicadas

(a) $y'(x) + 2y(x) = e^x, \quad y(0) = 1,$ **(b)** $x'(t) + x(t)\cos(t) = 0, \quad x(\pi) = 100.$

---

(3) Hallar la solución general $y(x)$ de las siguientes EDO homogéneas de segundo orden

(a) $y'' = 0$ **(d)** $y'' + 5y' + 4y = 0$

(b) $y'' + 36y = 0$ **(e)** $y'' + 4y' + \frac{25}{4}y = 0$

(c) $y'' - 36y = 0$

---

(4) Hallar la solución particular que cumple las condiciones dadas:

(a) $y'' = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$ **(d)** $y'' + 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$

(b) $y'' + 36y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$ **(e)** $y'' + 4y' + \frac{25}{4}y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

(c) $y'' - 36y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1$

---

(5) Hallar la solución particular que cumple las condiciones (homogéneas) dadas:

(a) $y'' = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$ **(d)** $y'' + 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$

(b) $y'' + 36y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$ **(e)** $y'' + 4y' + \frac{25}{4}y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$

(c) $y'' - 36y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$

---

(6) Hallar todas las soluciones que cumplen las condiciones dadas:

(a) $y'' = 0, \quad y(0) = 0, y(\pi) = 0$ **(d)** $y'' + 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, y(\pi) = 0$

(b) $y'' + 36y = 0, \quad y(0) = 0, y(\pi) = 0$ **(e)** $y'' + 4y' + \frac{25}{4}y = 0, \quad y(0) = 0, y(\pi) = 0$

(c) $y'' - 36y = 0, \quad y(0) = 0, y(\pi) = 0$

---

(7) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) - 4y(t) \qquad & x(0) = 1 \\ y'(t) &= x(t) + y(t) \qquad & y(0) = 1 \end{aligned}$$

---

(8) Para $x \in \mathbb{R}$ se definen el seno y coseno hiperbólico de la siguiente manera

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(a) Graficar ambas funciones y determinar el valor de $\cosh(0)$, $\operatorname{senh}(0)$, $\cosh'(0)$ y $\operatorname{senh}'(0)$.

(b) Determinar todos los valores de x para los que $\cosh(x) = 0$, y también aquellos para los que $\operatorname{senh}(x) = 0$.

(c) Verificar que $\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(d) Mostrar que $\frac{d}{dx}\,\mathrm{senh}(x) = \cosh(x)$ y que $\frac{d}{dx}\cosh(x) = \mathrm{senh}(x)$.

(e) Mostrar que dado un par de números A, B, existe un par de números $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ tal que

$$A\,e^{x} + B\,e^{-x} = \tilde{A}\,\cosh(x) + \tilde{B}\,\mathrm{senh}(x), \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

(f) Mostrar que si $\lambda > 0$ entonces toda solución de $y'' - \lambda y = 0$ se puede escribir

$$\tilde{A}\cosh\left(\sqrt{\lambda}\,x\right) + \tilde{B}\,\mathrm{senh}\left(\sqrt{\lambda}\,x\right)$$

(g) Mostrar que si $H \in \mathbb{R}$ está dado (fijo), y $\lambda > 0$ entonces toda solución de $y'' - \lambda y = 0$ se puede escribir

$$y(x) = \tilde{\tilde{A}}\cosh\left(\sqrt{\lambda}\,x - H\right) + \tilde{\tilde{B}}\,\mathrm{senh}\left(\sqrt{\lambda}\,x - H\right)$$

---

(9) Dado $\lambda > 0$ fijo, hallar todas las soluciones de $y'' - \lambda y = 0$ que cumplan

(a) $y(0) = 0$ **(b)** $y'(0) = 0$ **(c)** $y(3) = 0$ **(d)** $y'(3) = 0$

Ayuda: usar el problema anterior para hallar la fórmula más sencilla posible.

---

(10) Mostrar que para los siguientes operadores $\mathcal{L}$ se cumple que

$$\mathcal{L}[c_1\,u_1 + c_2\,u_2] = c_1\,\mathcal{L}[u_1] + c_2\,\mathcal{L}[u_2]$$

para todo par de constantes c_1, c_2 y funciones suaves u_1, u_2.

(a) $\mathcal{L}[u] = u_t - k u_{xx}, \quad u = u(x,t)$

(b) $\mathcal{L}[u] = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}, \quad u = u(x,y,z)$

(c) $\mathcal{L}[u] = (3+2x)u_{xx} + u_{yy}, \quad u = u(x,y)$

(d) $\mathcal{L}[u] = u_{tt} - \left(e^{-x^2}u_x\right)_x, \quad u = u(x,t)$

---

(11) Encontrar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones lineales de primer orden con coeficientes constantes:

(a) $2\,u_x - 3\,u_y = x$ **(b)** $u_x + u_y - u = 0.$

---

(12) ¿Qué forma debe tener la función $g(x)$ para que el siguiente problema tenga solución?

$$\begin{cases} u_x + 3\,u_y - u = 1 & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x, 3\,x) = g(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Si g cumple tal condición. ¿Tiene el problema solución única?

---

(13) Consideremos la ecuación diferencial siguiente: $5u_x - u_y + u = 0, \qquad u = u(x,y).$

(a) Hallar la solución general, y decir cuáles son las curvas características.

En cada uno de los siguientes casos hallar (si es posible) una solución de la ecuación resuelta en **(a)** que cumpla la condición lateral indicada. Si no hay, indicar por qué. Si hay más de una, indicar tres soluciones diferentes.

(b) $u(-5x, x) = 3e^{x}$, **(c)** $u(x, \dfrac{-x+5}{5}) = x(1-x)$, **(d)** $u(x,x) = x^2$.

---

(14) Encontrar la solución general, en los dominios indicados, de cada una de las siguientes ecuaciones lineales de primer orden con coeficientes variables:

(a) $x\,u_x + 2\,y\,u_y = 0$, $x > 0$, $y > 0$.

(b) $y\,u_x - 4\,x\,u_y = 2\,x\,y$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

---

(15) Encontrar la forma paramétrica de la solución de cada uno de los siguientes problemas:

(a) $\begin{cases} x\,u_x + 2\,y\,u_y = 0, & x > 0, \quad y > 0 \\ u(s, e^{-s}) = \mathrm{sen}\,s, & s > 0. \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} y\,u_x - 4\,x\,u_y = 2\,x\,y, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ u(s, s^3) = 1, & s \in \mathbb{R} \end{cases}$
