(1) Consideremos la *solución fundamental de la ecuación del calor* en una dimensión dada por

$$v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Demostrar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es acotada y de soporte compacto (existe $M > 0$ tal que $f(x) = 0$ si $|x| > M$), entonces la función $u(x,t)$ definida por

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} f(y) v(x-y,t)\, dy, \qquad \text{para } x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{1}$$

cumple lo siguiente:

(a) $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ (Demostrarlo primero para v y ver que bajo la hipótesis de f acotada y de soporte compacto se puede *meter* la derivada en la integral);

(b) $u_t = k u_{xx}$ para $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$; (demostrarlo primero para v y usar—nuevamente— que se puede *meter* la derivada en la integral);

(c) Si x_0 es un punto de continuidad de f, entonces $\lim\limits_{t \to 0} u(x_0,t) = f(x_0)$.

Ayuda: Seguir los siguientes pasos:

(I) Demostrar que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$. Para esto usar que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx = \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{-|x|^2}\, dx\right)^{1/2}$ y calcular la integral de $\mathbb{R}^2$ usando coordenadas polares.

(II) Demostrar que $\int_{\mathbb{R}} v(x,t)\, dx = 1$ para todo $t > 0$.

(III) Demostrar que $\int_{|x|<\delta} v(x,t)\, dx \to 1$ cuando $t \to 0^+$, para cualquier $\delta > 0$ fijo.

(IV) Usar que

$$f(x_0) - u(x_0,t) = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x_0) - f(x_0-y)] v(y,t)\, dy = \int_{|y|<\delta} [f(x_0) - f(x_0-y)] v(y,t)\, dx + \int_{|y|>\delta} [f(x_0) - f(x_0-y)] v(y,t)\, dy.$$

Comentario: Se puede demostrar que la ecuación del calor en $\mathbb{R}$ tiene una única solución acotada para cada condición inicial f. Este problema nos dice que la fórmula para dicha solución está dada por (1).

---

(2) Expresar una solución del siguiente problema

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx}, & 0 \le x \le 3, \quad t \ge 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(3,t) = 0, & t \ge 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 \le x \le 3, \end{cases}$$

en cada uno de los siguientes casos

(a) $f(x) = 4\,\mathrm{sen}(\frac{2\pi x}{3}) - \mathrm{sen}(\frac{5\pi x}{3})$; **(b)** $f(x) = 5\,\mathrm{sen}(4\pi x) + 2\,\mathrm{sen}(10\pi x)$; **(c)** $f(x) = 3\,\mathrm{sen}^3(\frac{\pi x}{3})$.

---

(3) Expresar una solución del siguiente problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & -\pi \le x \le \pi, \quad t \ge 0, \\ u(-\pi,t) = u(\pi,t), \quad u_x(\pi,t) = u_x(-\pi,t), & t \ge 0, \\ u(x,0) = f(x), & -\pi \le x \le \pi, \end{cases}$$

en cada uno de los siguientes casos

(a) $f(x) = 5\cos(x) + 3\,\mathrm{sen}(8x)$; **(b)** $f(x) = 4 + \cos^2(3x)$.

(4) Hallar todas las soluciones $u(x,t) = X(x)T(t)$ de variables separadas del problema:

$$\begin{aligned} &u_t = ku_{xx}, \qquad 0 \le x \le L, \quad t \ge 0, \\ &u_x(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) = 0, \qquad t \ge 0. \end{aligned}$$

¿Qué situación física representan las condiciones de borde?

---

(5) Hallar todas las soluciones $u(x,t) = X(x)T(t)$ de variables separadas del problema:

$$\begin{aligned} &u_t = ku_{xx}, \qquad 0 \le x \le L, \quad t \ge 0, \\ &u(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) = -u(L,t), \qquad t \ge 0. \end{aligned}$$

¿Qué situación física representan las condiciones de borde?

---

(6) Supongamos que $v(x,t)$ es una función C^2 que satisface

$$\begin{aligned} &(ED) \qquad v_t = kv_{xx} \quad 0 \le x \le L, \quad t \ge 0; \\ &(CB) \qquad v(0,t) = 0 \quad v(L,t) = 0, \quad t \ge 0. \end{aligned}$$

Demostrar que si $0 \le t_1 \le t_2$, entonces

$$\int_0^L [v(x,t_2)]^2 \, dx \le \int_0^L [v(x,t_1)]^2 \, dx. \tag{2}$$

(Ayuda: proceder como en el primer teorema de unicidad).

---

(7) Demostrar el mismo resultado del ejercicio anterior cuando las condiciones de borde se cambian por

$$\textbf{(a)} \begin{cases} v_x(0,t) = 0 \\ v_x(L,t) = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(b)} \begin{cases} v_x(0,t) = 0 \\ v(L,t) = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(c)} \begin{cases} v_x(0,t) = hv(0,t) \quad (h > 0) \\ v(L,t) = 0 \end{cases}$$

---

(8) Usar los principios del máximo/mínimo para deducir *cotas ajustadas* para la solución de

$$\begin{aligned} &u_t = ku_{xx}, \qquad 0 \le x \le 5, \quad t \ge 0, \\ &u(0,t) = 0, \quad u(5,t) = 0, \qquad t \ge 0, \\ &u(x,0) = x(5-x), \qquad 0 \le x \le 5. \end{aligned}$$

---

(9) Considerar la misma ecuación del problema anterior:

$$\begin{aligned} &u_t = ku_{xx}, \qquad 0 \le x \le 5, \quad t \ge 0, \\ &u(0,t) = 0, \quad u(5,t) = 0, \qquad t \ge 0, \\ &u(x,0) = f(x), \qquad 0 \le x \le 5. \end{aligned}$$

Considerar $f_e(x) = x(5-x)$ y $f_a(x) = \frac{200}{\pi^3} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{5}\right)$; f_e es la condición inicial *exacta* y f_a la *aproximada*.

(a) Utilizando una computadora/calculadora, superponer los gráficos de las funciones f_e y f_a en el intervalo $[0,5]$. En MATLAB se puede hacer de la siguiente manera

```
>> x = [0:.01:5];
>> fe = x .* (5-x);
>> fa = 200/pi^3*sin(pi/5*x);
>> plot(x, fe, x, fa);
>> legend('exacta', 'aproximada')
```

(b) Graficar el error $f_e(x) - f_a(x)$. En MATLAB:

```
>> plot(x, fe - fa);
>> legend('error')
```

(c) Tomando una grilla de aproximadamente 500 puntos, calcular el máximo error entre f_e y f_a (usar valor absoluto). En MATLAB: `>> max(abs(fe-fa))`

También se puede hallar el máximo y el mínimo de $f(x) - g(x)$ analíticamente, pero no vale la pena en este caso.

(d) ¿Cuál es la solución $u_a(x,t)$ del problema tomando como condición inicial la función $f_a(x)$?

(e) Si se toma $u_a(x,t)$ como aproximación de la solución exacta $u_e(x,t)$. ¿Cuál es el error entre $u_e(x,t)$ y $u_a(x,t)$ para $0 \leq x \leq 5$ y $t \geq 0$? ¿Sirve $u_a(x,t)$ como aproximación de $u_e(x,t)$?

(f) Graficar el perfil de temperaturas dado por la aproximación $u_a(x,t)$ para $t = 0, 1, 2$.

(g) Graficar la temperatura en el punto medio del intervalo $[0,5]$ para t en el intervalo $[0,7]$.

---

(10) Repetir el ejercicio anterior con $f_a(x) = \frac{200}{\pi^3} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{5}\right) + \frac{200}{27\pi^3} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{5}\right)$.

---

(11) Sea u una solución C^2 del problema

$$\begin{aligned} &u_t = k u_{xx}, \qquad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0, \\ &u(0,t) = a(t), \quad u_x(L,t) = 0, \qquad t \geq 0, \\ &u(x,0) = f(x), \qquad 0 \leq x \leq L. \end{aligned}$$

Demostrar que dado $T > 0$, definiendo

$$M = \max\left\{ \max_{t\in[0,T]} a(t), \max_{x\in[0,L]} f(x) \right\}$$

se cumple que $u(x,t) \leq M$, para todo $0 \leq x \leq L$ y $0 \leq t \leq T$.

---

(12) Enunciar y demostrar un principio del máximo para la ecuación del calor en el alambre circular.

---

(13) Sea Ω un dominio de $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$, y supongamos que $u = u(\overline{x},t)$ es una solución C^2 del problema

$$\begin{aligned} &u_t = k\overline{\nabla}^2 u, \qquad \overline{x} \in \overline{\Omega}, \quad t \geq 0, \\ &u(\overline{x},t) = a(\overline{x},t), \qquad \overline{x} \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \\ &u(\overline{x},0) = f(\overline{x}), \qquad \overline{x} \in \overline{\Omega}. \end{aligned}$$

Demostrar que dado $T > 0$, definiendo

$$M = \max\left\{ \max_{\overline{x}\in\partial\Omega, t\in[0,T]} a(\overline{x},t), \max_{\overline{x}\in\overline{\Omega}} f(\overline{x}) \right\}$$

se cumple que $u(\overline{x},t) \leq M$, para todo $\overline{x} \in \overline{\Omega}$ y $0 \leq t \leq T$.

---

(14) Resolver el siguiente problema

$$\begin{aligned} &u_t = 2u_{xx}, \qquad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0, \\ &u(0,t) = -1, \quad u_x(1,t) = 1, \qquad t \geq 0, \\ &u(x,0) = x + \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right) - 1, \qquad 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

---

(15) Resolver el siguiente problema

$$\begin{aligned} &u_t = 5u_{xx}, \qquad 0 \leq x \leq 10, \quad t \geq 0, \\ &u_x(0,t) = 2, \quad u_x(10,t) = 3, \qquad t \geq 0, \\ &u(x,0) = \frac{1}{20}x^2 + 2x + \cos(\pi x), \qquad 0 \leq x \leq 10. \end{aligned}$$
