

(1) Verificar que si w está dado por la fórmula (2), u_1 y u_2 son soluciones de (6a) y (6b) respectivamente (de la sección 3.4 del libro de Bleecker-Csordas), entonces

$$u(x, t) = w(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t)$$

es solución del problema (1) de la misma sección.

(2) Considerar el problema siguiente:

$$\begin{aligned} u_t &= ku_{xx}, & 0 \leq x \leq L, & \quad t \geq 0, \\ u_x(0, t) &= a(t), & u_x(L, t) &= b(t), & \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq L. \end{aligned} \tag{1}$$

(a) ¿Qué situación física representa?

(b) Dar una fórmula para una función $w(x, t)$ que cumpla las condiciones de borde.

(c) ¿Qué problema debe resolver $v(x, t)$ para que $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$ sea solución de (1)?

(d) Realizar una descomposición del problema descrito en el ítem anterior en dos subproblemas más sencillos, análogos a (6a) y (6b). Dar las fórmulas precisas para los datos no-homogéneos de los problemas resultantes ($g(x)$ y $h(x, t)$ de (6a) y (6b) respectivamente).

(e) Demostrar que la suma de $w(x, t)$ y las soluciones $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ de los subproblemas del ítem anterior, es solución del problema original.

(3) Repetir los cinco ítems el problema anterior para la siguiente situación:

$$\begin{aligned} u_t &= ku_{xx} + q(x, t), & 0 \leq x \leq L, & \quad t \geq 0, \\ u_x(0, t) &= a(t), & u_x(L, t) + Hu(L, t) &= Hb(t), & \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq L. \end{aligned}$$

(4) Usando la fórmula de Green

$$\int_a^b f''(x)g(x) dx - \int_a^b f(x)g''(x) dx = [f'(x)g(x) - f(x)g'(x)] \Big|_a^b,$$

hallar fórmulas (sencillas) para las siguientes integrales. Para los casos $n = m$ usar alguna de las dos identidades trigonométricas siguientes:

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\alpha), \quad \cos^2(\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\alpha).$$

(a) $\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx, \quad \text{para } n, m = 1, 2, 3, \dots$

(b) $\int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx, \quad \text{para } n, m = 0, 1, 2, 3, \dots$

(c) $\int_0^L \sin\left(\frac{(n - \frac{1}{2})\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{(m - \frac{1}{2})\pi x}{L}\right) dx, \quad \text{para } n, m = 1, 2, 3, \dots$

(d) $\int_0^L \cos\left(\frac{(n - \frac{1}{2})\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{(m - \frac{1}{2})\pi x}{L}\right) dx, \quad \text{para } n, m = 1, 2, 3, \dots$

(5) En base al problema anterior, decir cómo deben calcularse los coeficientes a_n, b_n (en términos de f) si se sabe que se cumplen las igualdades siguientes para f definida en $[0, L]$:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} & f(x) = \sum_{n=1}^N b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \\
 \text{(b)} & f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \\
 \text{(c)} & f(x) = \sum_{n=1}^N c_n \sin\left(\frac{(n - \frac{1}{2})\pi x}{L}\right). \\
 \text{(d)} & f(x) = \sum_{n=1}^N d_n \cos\left(\frac{(n - \frac{1}{2})\pi x}{L}\right).
 \end{array}$$

(6) En cada caso, llamamos $f_5(x)$ a la aproximación de $f(x)$ que se obtiene al hallar los coeficientes a_n, b_n para $n \leq 5$ y sumar los términos de la serie de Fourier correspondientes. En cada caso, graficar $f(x)$ y $f_5(x)$ en un mismo par de ejes (usando la computadora). En ambos los casos considerar $L = 1$.

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} & f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ (1-x) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \\
 & \text{serie de senos} \\
 & \text{en } [0, 1] \\
 \text{(b)} & f(x) = 0,5 + 10x^2(1-x)^2 \\
 & \text{serie de cosenos} \\
 & \text{en } [0, 1]
 \end{array}$$

(7) Utilizando la función f_5 del problema anterior, calcular la $u_5(x, t)$ que resuelve el problema del calor correspondiente, y graficarla para $t = 0; 0,005; 0,01; 0,015; 0,02; 0,025$.

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} & \begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 \leq x \leq 1, t \geq 0 \\ u(0, t) = 0, & u(1, t) = 0, \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) = f_5(x), & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \\
 \text{(b)} & \begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 \leq x \leq 1, t \geq 0 \\ u_x(0, t) = 0, & u_x(1, t) = 0, \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) = f_5(x), & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}
 \end{array}$$

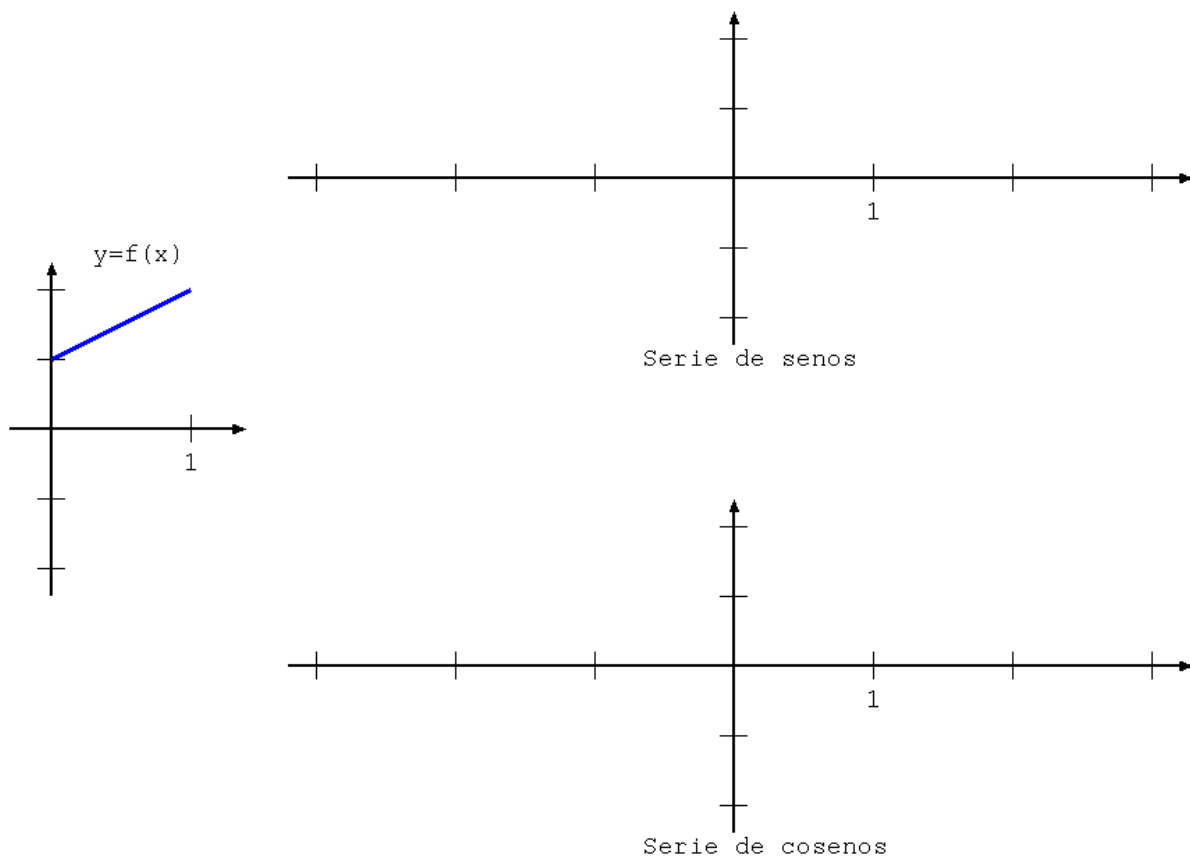
(8) Verificar (demostrar) las siguientes afirmaciones:

- (a) El producto de dos funciones pares es par.
- (b) El producto de dos funciones impares es par.
- (c) El producto de una función par y una impar es impar.
- (d) Si $f(x)$ es impar ($-L \leq x \leq L$), entonces $\int_{-L}^L f(x) dx = 0$.
- (e) Si $f(x)$ es par ($-L \leq x \leq L$), entonces $\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx$.

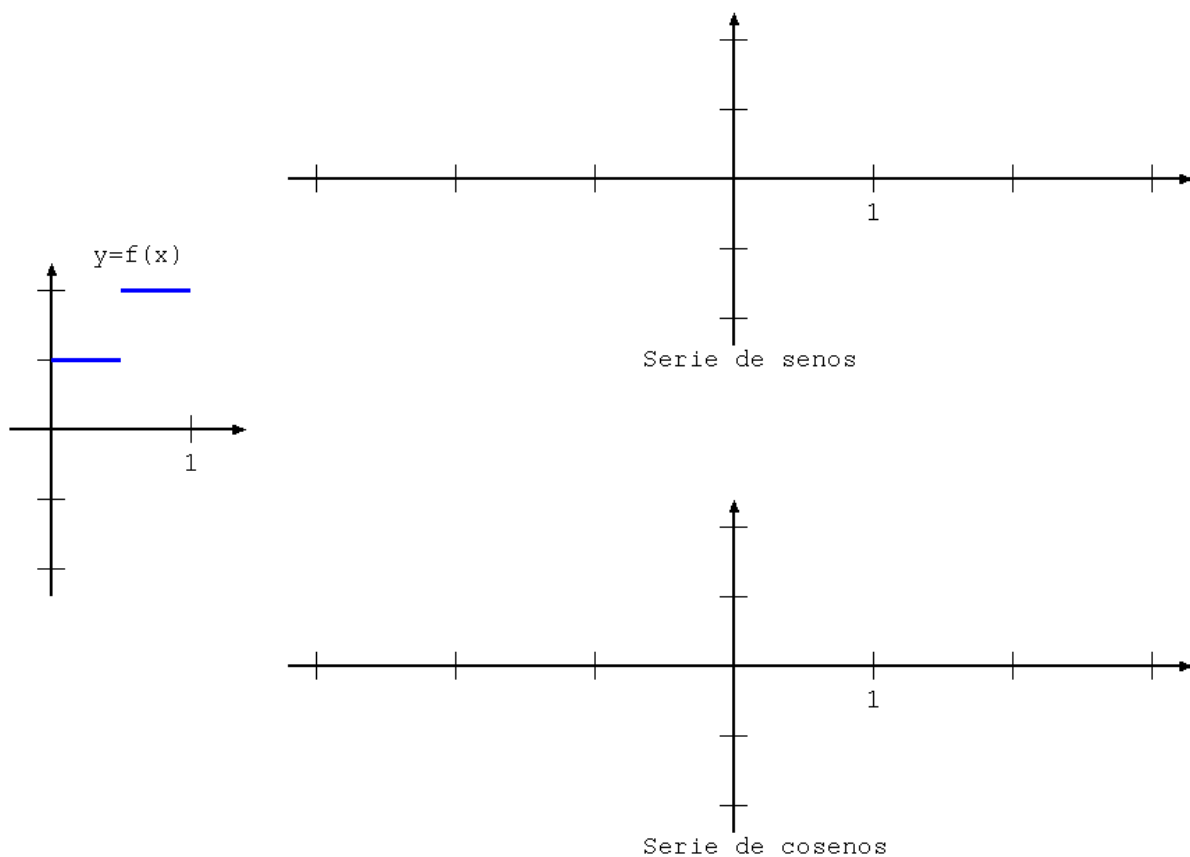
(9) Mostrar que cualquier función $f(x)$ definida en $[-L, L]$ se puede escribir como suma de una función par y una impar. Ayuda: $f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$.

(10) Consideremos la función $f(x)$ definida sobre el intervalo $[0, 1]$ cuyo gráfico es el de la figura de la izquierda. Graficar sobre el intervalo $[-3, 3]$ el límite de la serie de Fourier de senos y el de la serie de Fourier de cosenos de f .

(a)



(b)



(11) Hallar la solución formal de cada uno de los siguientes problemas (decir también cómo se calculan —en términos de f — los coeficientes a_n y/o b_n de la fórmula resultante).

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} u_t = ku_{xx}, & 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0, \\ u_x(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = 0, & t \geq 0. \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases} \quad \text{(b)} \quad \begin{cases} u_t = ku_{xx}, & 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0, \\ u(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = 0, & t \geq 0. \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

(12) Ej. 13 de la sección 4.2 de [Bleecker-Csordas] (pág 235).

(13) Ej. 14 de la sección 4.2 de [Bleecker-Csordas] (pág 236).

(14) Sea $f(x)$ una función C^3 en el intervalo $[-L, L]$ tal que $f(-L) = f(L)$, $f'(-L) = f'(L)$, y $f''(-L) = f''(L)$. Demostrar que si $S_N(x)$ es la suma parcial de orden N de la serie de Fourier de senos y cosenos de f , entonces

$$\text{(a)} \quad \max_{x \in [-L, L]} |f(x) - S_N(x)| \leq \frac{4L^3 M}{\pi^3 N^2}, \quad \text{donde} \quad M = \max_{x \in [-L, L]} |f'''(x)|.$$

$$\text{(b)} \quad \max_{x \in [-L, L]} |f'(x) - S'_N(x)| \leq \frac{4L^2 M}{\pi^2 N}.$$
