---

(1) Expresar una solución del siguiente problema

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx}, & 0 \le x \le 3, \quad t \ge 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(3,t) = 0, & t \ge 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 \le x \le 3, \end{cases}$$

en cada uno de los siguientes casos

(a) $f(x) = 4\,\mathrm{sen}(\frac{2\pi x}{3}) - \mathrm{sen}(\frac{5\pi x}{3})$; **(b)** $f(x) = 5\,\mathrm{sen}(4\pi x) + 2\,\mathrm{sen}(10\pi x)$; **(c)** $f(x) = 3\,\mathrm{sen}^3(\frac{\pi x}{3})$.

---

(2) Expresar una solución del siguiente problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & -\pi \le x \le \pi, \quad t \ge 0, \\ u(-\pi,t) = u(\pi,t), \quad u_x(\pi,t) = u_x(-\pi,t), & t \ge 0, \\ u(x,0) = f(x), & -\pi \le x \le \pi, \end{cases}$$

en cada uno de los siguientes casos

(a) $f(x) = 5\cos(x) + 3\,\mathrm{sen}(8x)$; **(b)** $f(x) = 4 + \cos^2(3x)$.

---

(3) Hallar todas las soluciones $u(x,t) = X(x)T(t)$ de variables separadas del problema:

$$\begin{aligned} &u_t = ku_{xx}, && 0 \le x \le L, \quad t \ge 0, \\ &u_x(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) = 0, && t \ge 0. \end{aligned}$$

¿Qué situación física representan las condiciones de borde?

---

(4) Hallar todas las soluciones $u(x,t) = X(x)T(t)$ de variables separadas del problema:

$$\begin{aligned} &u_t = ku_{xx}, && 0 \le x \le L, \quad t \ge 0, \\ &u(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) = -u(L,t), && t \ge 0. \end{aligned}$$

¿Qué situación física representan las condiciones de borde?

---

(5) Supongamos que $v(x,t)$ es una función C^2 que satisface

$$\begin{aligned} &(ED) && v_t = kv_{xx} \quad 0 \le x \le L, \quad t \ge 0; \\ &(CB) && v(0,t) = 0 \quad v(L,t) = 0, \quad t \ge 0. \end{aligned}$$

Demostrar que si $0 \le t_1 \le t_2$, entonces

$$\int_0^L [v(x,t_2)]^2\,dx \le \int_0^L [v(x,t_1)]^2\,dx. \tag{1}$$

(Ayuda: proceder como en el primer teorema de unicidad).

---

(6) Demostrar el mismo resultado del ejercicio anterior cuando las condiciones de borde se cambian por

(a) $\begin{cases} v_x(0,t) = 0 \\ v_x(L,t) = 0 \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} v_x(0,t) = 0 \\ v(L,t) = 0 \end{cases}$ **(c)** $\begin{cases} v_x(0,t) = hv(0,t) \quad (h > 0) \\ v(L,t) = 0 \end{cases}$

(7) Usar los principios del máximo/mínimo para deducir *cotas ajustadas* para la solución de

$$\begin{aligned} &u_t = ku_{xx}, \qquad 0 \le x \le 5, \quad t \ge 0,\\ &u(0,t) = 0, \quad u(5,t) = 0, \qquad t \ge 0,\\ &u(x,0) = x(5-x), \qquad 0 \le x \le 5. \end{aligned}$$

---

(8) Considerar la misma ecuación del problema anterior:

$$\begin{aligned} &u_t = ku_{xx}, \qquad 0 \le x \le 5, \quad t \ge 0,\\ &u(0,t) = 0, \quad u(5,t) = 0, \qquad t \ge 0,\\ &u(x,0) = f(x), \qquad 0 \le x \le 5. \end{aligned}$$

Considerar $f_e(x) = x(5-x)$ y $f_a(x) = \frac{200}{\pi^3} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{5}\right)$; f_e es la condición inicial *exacta* y f_a la *aproximada.*

(a) Utilizando una computadora/calculadora, superponer los gráficos de las funciones f_e y f_a en el intervalo $[0,5]$. En MATLAB se puede hacer de la siguiente manera

```
>> x = [0:.01:5];
>> fe = x .* (5-x);
>> fa = 200/pi^3*sin(pi/5*x);
>> plot(x, fe, x, fa);
>> legend('exacta', 'aproximada')
```

(b) Graficar el error $f_e(x) - f_a(x)$. En MATLAB:

```
>> plot(x, fe - fa);
>> legend('error')
```

(c) Tomando una grilla de aproximadamente 500 puntos, calcular el máximo error entre f_e y f_a (usar valor absoluto). En MATLAB: `>> max(abs(fe-fa))`

También se puede hallar el máximo y el mínimo de $f(x) - g(x)$ analíticamente, pero no vale la pena en este caso.

(d) ¿Cuál es la solución $u_a(x,t)$ del problema tomando como condición inicial la función $f_a(x)$?

(e) Si se toma $u_a(x,t)$ como aproximación de la solución exacta $u_e(x,t)$. ¿Cuál es el error entre $u_e(x,t)$ y $u_a(x,t)$ para $0 \le x \le 5$ y $t \ge 0$? ¿Sirve $u_a(x,t)$ como aproximación de $u_e(x,t)$?

(f) Graficar el perfil de temperaturas dado por la aproximación $u_a(x,t)$ para $t = 0, 1, 2$.

(g) Graficar la temperatura en el punto medio del intervalo $[0,5]$ para t en el intervalo $[0,7]$.

---

(9) Repetir el ejercicio anterior con $f_a(x) = \frac{200}{\pi^3} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{5}\right) + \frac{200}{27\pi^3} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{5}\right)$.

---

(10) Enunciar y demostrar un principio del máximo para la ecuación del calor en el alambre circular.

---

(11) Resolver el siguiente problema

$$\begin{aligned} &u_t = 2u_{xx}, \qquad 0 \le x \le 1, \quad t \ge 0,\\ &u(0,t) = -1, \quad u_x(1,t) = 1, \qquad t \ge 0,\\ &u(x,0) = x + \sin(\frac{3\pi x}{2}) - 1, \qquad 0 \le x \le 1. \end{aligned}$$

---

(12) Resolver el siguiente problema

$$\begin{aligned} &u_t = 5u_{xx}, \qquad 0 \le x \le 10, \quad t \ge 0,\\ &u_x(0,t) = 2, \quad u_x(10,t) = 3, \qquad t \ge 0,\\ &u(x,0) = \frac{1}{20}x^2 + 2x + \cos(\pi x), \qquad 0 \le x \le 10. \end{aligned}$$
