

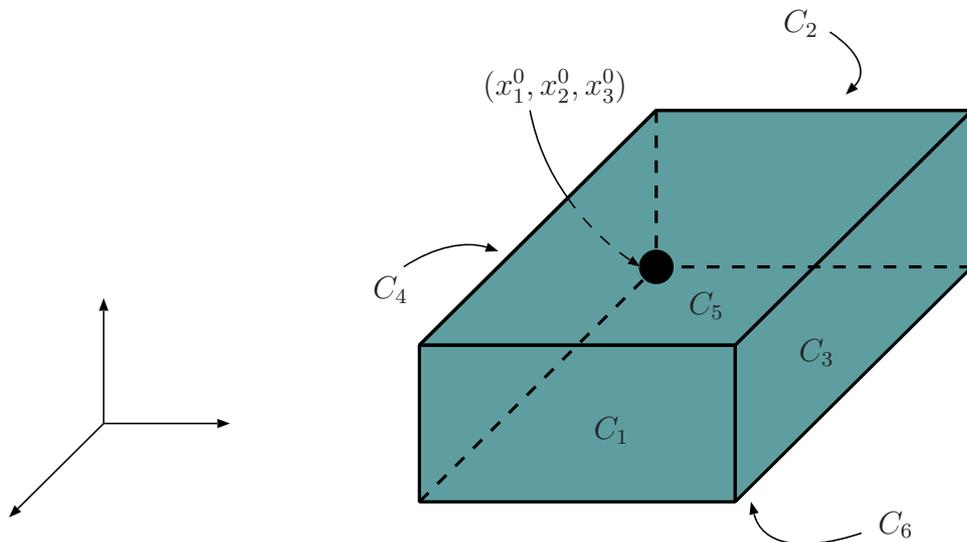
# Capítulo 2

## Divergencia y flujo

Sea  $\bar{V} = V_1\bar{i} + V_2\bar{j} + V_3\bar{k} = (V_1, V_2, V_3)$  un campo vectorial en el espacio, por ejemplo el campo de velocidades de un fluido en un cierto instante de tiempo, en un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales  $\{x_1, x_2, x_3\}$ . Tomamos un punto  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$  en el espacio dentro de la región en que  $\bar{V}$  está bien definido y es diferenciable. Sea  $R$  un paralelepípedo con vértice en  $x^0$ , dado por

$$R = [x_1^0, x_1^0 + h_1] \times [x_2^0, x_2^0 + h_2] \times [x_3^0, x_3^0 + h_3] \\ = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^0 \leq x_1 \leq x_1^0 + h_1; x_2^0 \leq x_2 \leq x_2^0 + h_2; x_3^0 \leq x_3 \leq x_3^0 + h_3\}.$$

Sea  $S = \partial R$  la frontera de  $R$ . La superficie  $S$  se descompone en seis caras planas  $C_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ .



Como las aristas tienen área nula, tendremos que

$$\iint_S \bar{V} \cdot \bar{n} \, d\sigma = \sum_{i=1}^6 \iint_{C_i} \bar{V} \cdot \bar{n} \, d\sigma,$$

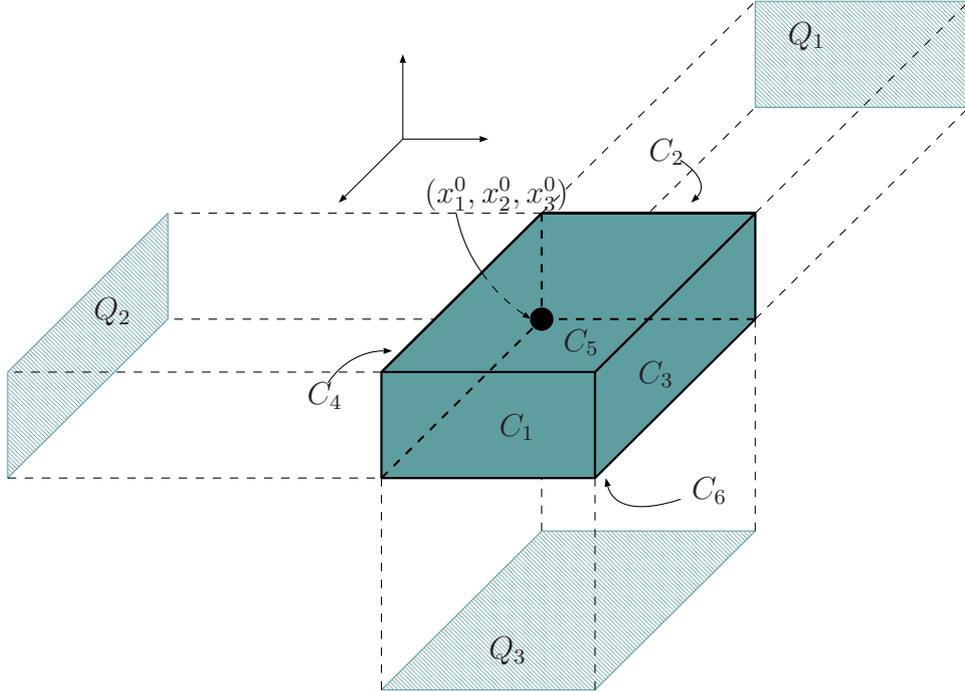
todas las integrales son de superficie en los correspondientes dominios y  $\bar{n}$  es la normal exterior. Hagamos el cálculo para las caras  $C_1$  y  $C_2$ . Puesto que sobre  $C_1$  la normal

exterior es  $\bar{e}_1 = \bar{i}$  y sobre  $C_2$  la normal exterior es  $-\bar{e}_1 = -\bar{i}$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \iint_{C_1} \bar{V} \cdot \bar{n} d\sigma &= \iint_{C_1} \bar{V} \cdot \bar{i} d\sigma = \iint_{C_1} V_1 d\sigma = \int_{x_2^0}^{x_2^0+h_2} \int_{x_3^0}^{x_3^0+h_2} V_1(x_1^0+h_1, x_2, x_3) dx_3 dx_2, \\ \iint_{C_2} \bar{V} \cdot \bar{n} d\sigma &= \iint_{C_2} \bar{V} \cdot (-\bar{i}) d\sigma = - \iint_{C_2} V_1 d\sigma = - \int_{x_2^0}^{x_2^0+h_2} \int_{x_3^0}^{x_3^0+h_2} V_1(x_1^0, x_2, x_3) dx_3 dx_2. \end{aligned}$$

Definamos ahora  $Q_1 = [x_2^0, x_2^0+h_2] \times [x_3^0, x_3^0+h_3] \subset \mathbb{R}^2$  (la proyección de  $R$  sobre el plano  $x_2x_3$ ). Dividiendo por  $\text{vol}(R) = h_1 h_2 h_3$ , tenemos que

$$\frac{1}{\text{vol}(R)} \iint_{C_1 \cup C_2} \bar{V} \cdot \bar{n} d\sigma = \frac{1}{h_2 h_3} \iint_{Q_1} \frac{V_1(x_1^0+h_1, x_2, x_3) - V_1(x_1^0, x_2, x_3)}{h_1} dx_2 dx_3.$$



Si definimos  $Q_2 = [x_1^0, x_1^0+h_1] \times [x_3^0, x_3^0+h_3] \subset \mathbb{R}^2$  y  $Q_3 = [x_1^0, x_1^0+h_1] \times [x_2^0, x_2^0+h_2] \subset \mathbb{R}^2$ , haciendo cuentas análogas obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{vol}(R)} \iint_S \bar{V} \cdot \bar{n} d\sigma &= \frac{1}{h_2 h_3} \iint_{Q_1} \frac{V_1(x_1^0+h_1, x_2, x_3) - V_1(x_1^0, x_2, x_3)}{h_1} dx_2 dx_3 \\ &+ \frac{1}{h_1 h_3} \iint_{Q_2} \frac{V_2(x_1, x_2^0+h_2, x_3) - V_2(x_1, x_2^0, x_3)}{h_2} dx_1 dx_3 \\ &+ \frac{1}{h_1 h_2} \iint_{Q_3} \frac{V_3(x_1, x_2, x_3^0+h_3) - V_3(x_1, x_2, x_3^0)}{h_3} dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Tomando ahora límite cuando  $(h_1, h_2, h_3) \rightarrow (0, 0, 0)$  obtenemos que

$$\begin{aligned} \lim \frac{\iint_{\partial R} \bar{V} \cdot \bar{n} d\sigma}{\text{vol}(R)} &= \frac{\partial V_1}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0, x_3^0) + \frac{\partial V_2}{\partial x_2}(x_1^0, x_2^0, x_3^0) + \frac{\partial V_3}{\partial x_3}(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \\ &= \bar{\nabla} \cdot \bar{V}(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = \text{divergencia de } \bar{V} \text{ en } x^0. \end{aligned}$$

En palabras, podemos decir que

Si  $\bar{V}$  es el campo de velocidades de un fluido, la divergencia de  $\bar{V}$  en  $x^0$  es el flujo saliente de  $\bar{V}$  por unidad de volumen.

De un modo similar se obtiene que si  $\varphi$  es un campo escalar, entonces

$$\text{gradiente de } \varphi = \bar{\nabla}\varphi(x^0) = \lim \frac{\iint_{\partial R} \varphi \bar{n} d\sigma}{\text{vol}(R)},$$

donde estamos integrando un campo vectorial  $\varphi \bar{n}$ , y entendemos que

$$\begin{aligned} \iint_{\partial R} \varphi \bar{n} d\sigma &= \iint_{\partial R} \varphi (n_1 \bar{e}_1 + n_2 \bar{e}_2 + n_3 \bar{e}_3) d\sigma \\ &= \left( \iint_{\partial R} \varphi n_1 d\sigma \right) \bar{e}_1 + \left( \iint_{\partial R} \varphi n_2 d\sigma \right) \bar{e}_2 + \left( \iint_{\partial R} \varphi n_3 d\sigma \right) \bar{e}_3. \end{aligned}$$

También se puede demostrar que

$$\text{rotor de } \bar{V} = \bar{\nabla} \times \bar{V}(x^0) = \lim \frac{\iint_{\partial R} \bar{n} \times \bar{V} d\sigma}{\text{vol}(R)}.$$

En todos los casos mencionados, el límite se toma cuando  $(h_1, h_2, h_3) \rightarrow (0, 0, 0)$ .

La definición de gradiente está dada por

$$\bar{\nabla}\varphi = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial x_2} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial x_3} \bar{k} \right) \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \bar{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \bar{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \bar{k} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right),$$

y la de rotor está dada por

$$\bar{\nabla} \times \bar{V} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3} \right) \bar{i} + \left( \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \right) \bar{j} + \left( \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \right) \bar{k}.$$

Notemos que entonces valen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \cdot \bar{V}(x^0) &= \lim \frac{\iint_{\partial R} \bar{n} \cdot \bar{V} d\sigma}{\text{vol}(R)}, \\ \bar{\nabla} \varphi(x^0) &= \lim \frac{\iint_{\partial R} \bar{n} \varphi d\sigma}{\text{vol}(R)}, \\ \bar{\nabla} \times \bar{V}(x^0) &= \lim \frac{\iint_{\partial R} \bar{n} \times \bar{V} d\sigma}{\text{vol}(R)}. \end{aligned}$$

## 2.1. Teorema de Gauss

Hemos probado que

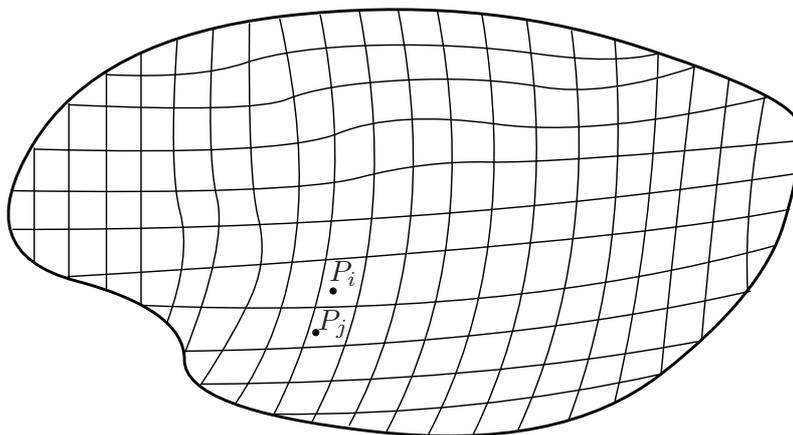
$$\frac{\iint_{\partial R} \bar{V} \cdot \bar{n} \, d\sigma}{\text{vol}(R)} \longrightarrow \bar{\nabla} \cdot \bar{V}(P),$$

si  $R$  es un paralelepípedo rectangular que *converge a  $P$*  (o se encoge a  $P$ ). La forma explícita de  $R$  para la validez de este resultado es irrelevante. Una demostración del teorema de la divergencia de Gauss puede hallarse en muchos libros (por ejemplo en el Vol. II del *Calculus* de Apostol), pero una heurística razonable puede obtenerse a partir de esta identidad.

Sea  $\Omega$  un dominio de  $\mathbb{R}^3$  con frontera  $\partial\Omega$  suave. Sea  $\bar{V}$  un campo vectorial suave en todo un entorno de  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ . Partimos el dominio  $\Omega$  en subdominios  $\Omega_i$  muy pequeños de modo que la aproximación

$$\frac{1}{\text{vol}(\Omega_i)} \iint_{\partial\Omega_i} \bar{V} \cdot \bar{n} \, d\sigma \approx \bar{\nabla} \cdot \bar{V}(P_i) \approx \frac{1}{\text{vol}(\Omega_i)} \iiint_{\Omega_i} \bar{\nabla} \cdot \bar{V} \, d\text{vol}$$

sea buena (el punto  $P_i$  está en  $\Omega_i$ ), digamos con un error menor a  $\varepsilon$ .



Multiplicando por  $\text{vol}(\Omega_i)$  y sumando para todos los índices  $i = 1, 2, \dots, I$  tendremos

$$\sum_{i=1}^I \iint_{\partial\Omega_i} \bar{V} \cdot \bar{n} \, d\sigma \approx \sum_{i=1}^I \bar{\nabla} \cdot \bar{V}(P_i) \text{vol}(\Omega_i) \approx \iiint_{\Omega} \bar{\nabla} \cdot \bar{V} \, d\text{vol},$$

(siguiendo ahora con un error menor a  $\varepsilon \text{vol}(\Omega)$ ). En el miembro izquierdo, todos los trozos de  $\partial\Omega_i$  que son interiores a  $\Omega$  aparecen dos veces y con normales opuestas, no ocurre lo mismo con los tramos de  $\partial\Omega_i$  que también son parte de la frontera de  $\Omega$ . Por consiguiente, en la suma de la izquierda, todas las integrales de superficie calculadas sobre superficies interiores a  $\Omega$  se cancelan mutuamente y entonces esa suma es  $\iint_{\partial\Omega} \bar{V} \cdot \bar{n} \, d\sigma$ . En el límite tenemos

$$\iint_{\partial\Omega} \bar{V} \cdot \bar{n} \, d\sigma = \iiint_{\Omega} \bar{\nabla} \cdot \bar{V} \, d\text{vol}.$$

Si el miembro izquierdo se interpreta como el flujo de  $\bar{V}$  saliente de  $\Omega$  por su frontera  $\partial\Omega$ , la imagen de un campo solenoidal o incompresible queda clara: si  $\bar{\nabla} \cdot \bar{V} = 0$  entonces

el flujo total saliente/entrante a través de de cada región es nulo. No nos dice que la velocidad  $\bar{V}$  sea nula, sino que el *balance* es nulo.

**Observación 2.1.** La igualdad

$$\iint_{\partial\Omega} \bar{V} \cdot \bar{n} d\sigma = \iiint_{\Omega} \bar{\nabla} \cdot \bar{V} d\text{vol}. \quad (2.1)$$

se cumple siempre que  $\bar{V}$  sea diferenciable y sus derivadas sean continuas en  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ . Por ejemplo, si  $\bar{V}$  es el campo de Newton

$$\bar{V}(\bar{r}) = -\frac{\bar{r}}{r^3},$$

con  $\bar{r} = (x_1, x_2, x_3)$  y  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ , que es diferenciable en  $\mathbb{R}^3 - \{\bar{0}\}$  (tiene una singularidad en el origen), la igualdad (2.1) vale siempre que  $\Omega$  sea una región tal que  $\bar{\Omega}$  *no toca al origen*. Por ejemplo, la igualdad (2.1) vale en la esfera con centro en  $(1, 1, 1)$  y radio 1, pero no vale en la esfera centrada en el origen con radio 1. Tampoco vale en la esfera centrada en el  $(1, 0, 0)$  y radio 1, aunque sí vale en la esfera ahuecada  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4\} = B((0, 0, 0), 2) - B((0, 0, 0), 1)$ .

**Ejemplo 2.2.** Si  $\bar{V}$  es un campo vectorial  $C^1(\mathbb{R}^3)$  y  $\bar{\nabla} \cdot \bar{V} = 0$  en  $\mathbb{R}^3$ , entonces

$$\iint_{\partial\Omega} \bar{V} \cdot \bar{n} d\sigma = \iiint_{\Omega} \bar{\nabla} \cdot \bar{V} d\text{vol} = 0.$$

Es decir, para toda superficie cerrada  $\partial\Omega$  que encierre una región de  $\mathbb{R}^3$  donde  $\bar{V}$  tiene divergencia nula, se cumple que el flujo de  $\bar{V}$  neto a través de  $\partial\Omega$  es nulo.

## 2.2. Teorema de Stokes

Sea  $\bar{V}$  un campo vectorial suave en el espacio  $\mathbb{R}^3$ . Sea  $C$  una curva cerrada simple en el espacio  $\mathbb{R}^3$ . La circulación de  $\bar{V}$  a lo largo de  $C$  está dada por

$$\text{Circ}(\bar{V}, C) = \oint_C \bar{V} \cdot d\bar{R} = \oint_C \bar{V} \cdot \bar{\tau} ds,$$

que es la integral de la componente de  $\bar{V}$  tangencial a la curva  $C$  ( $\bar{\tau}$  denota el vector tangencial a  $C$  orientado en la dirección en que se recorre la curva  $C$ ).

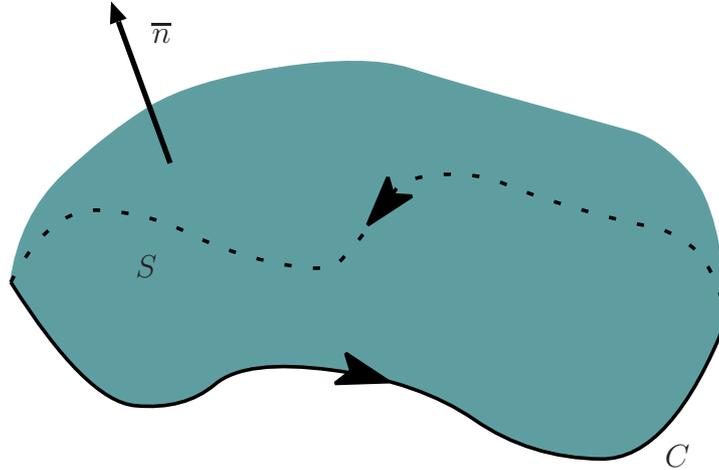
Por otro lado, el *rotor* de un campo vectorial diferenciable  $\bar{V}$  se define por

$$\bar{\nabla} \times \bar{V} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right)\bar{k}.$$

El **Teorema de Stokes** afirma que el rotor de  $\bar{V}$  también mide la circulación del fluido con velocidad  $\bar{V}$ . Precisamente, si  $C$  es una curva suave en el espacio y  $S$  es una superficie (cualquiera) suave cuyo contorno es  $C$ , ambas dentro del dominio de suavidad de  $\bar{V}$ , entonces

$$\iint_S (\nabla \times \vec{V}) \cdot \vec{n} \, d\sigma = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{R},$$

donde la normal a  $S$  y la dirección de recorrido de  $C$  en la parametrización se toman de modo que se satisfaga la regla de la mano derecha.



La primera observación que se puede hacer de la fórmula de Stokes, justifica el nombre de rotor o rotacional para el vector  $\nabla \times \vec{V}$ , puesto que la anulación del rotor implica la anulación de la circulación sobre cualquier curva cerrada.

Las consecuencias más profundas del teorema de Stokes se dan en la Teoría de Potencial.

Dado un campo vectorial  $\vec{V}$ , se dice que el campo escalar  $\varphi$  es *un potencial para  $\vec{V}$*  si satisface

$$\nabla \varphi = \vec{V}.$$

No es cierto que todo campo vectorial admita un potencial, por ejemplo, es fácil ver que el gradiente de cualquier potencial suficientemente suave  $\varphi$  es *irrotacional*. Es decir

$$\nabla \times \nabla \varphi = \vec{0}.$$

Esto nos dice que para que un campo vectorial admita un potencial, es *necesario* que dicho campo vectorial sea irrotacional:

$$\text{Si } \vec{V} \text{ admite un potencial } (\vec{V} = \nabla \varphi) \text{ entonces } \nabla \times \vec{V} = \vec{0}.$$

**Trabajo.** Dado un campo vectorial  $\vec{F}$  (pensamos ahora en un campo de fuerzas), se define *el trabajo realizado por  $\vec{F}$  sobre una partícula que se desplaza por una curva  $C$*  como

$$W_F(C) = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{R} = \int_C \vec{F} \cdot \vec{\tau} \, ds$$

donde  $\vec{\tau}$  denota (como antes) el vector tangencial a la curva  $C$  y apunta en la dirección que se recorre. Es decir, el trabajo de  $\vec{F}$  sobre  $C$  es la integral a lo largo de  $C$  de la componente tangencial a  $C$  de  $\vec{F}$ . El signo dependerá de la orientación de la curva.

**Campos Conservativos.** Se dice que un campo vectorial  $\overline{F}$  (pensamos en fuerzas) es *conservativo* si el trabajo realizado por  $\overline{F}$  al desplazar una partícula entre los puntos  $P$  y  $Q$  sólo depende de los puntos  $P$  y  $Q$  pero no de la particular trayectoria que los una, mientras la misma no salga del dominio de suavidad de  $\overline{F}$ . Equivalentemente un campo es conservativo si el trabajo realizado por el mismo en cualquier circuito cerrado es nulo.

Observemos ahora que si  $\overline{F}$  admite un potencial  $\varphi$ , y  $C$  es una curva (parametrizada por  $\overline{\gamma} : [0, 1] \rightarrow C$  que une  $P$  con  $Q$  ( $\overline{\gamma}(0) = P$ ,  $\overline{\gamma}(1) = Q$ ), entonces

$$\begin{aligned} W_F(C) &= \int_C \overline{F} \cdot \tau \, ds \\ &= \int_0^1 \overline{F}(\overline{\gamma}(t)) \cdot \overline{\gamma}'(t) \, dt \\ &= \int_0^1 \overline{\nabla} \varphi(\overline{\gamma}(t)) \cdot \overline{\gamma}'(t) \, dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (\varphi(\overline{\gamma}(t))) \, dt \\ &= \varphi(\overline{\gamma}(1)) - \varphi(\overline{\gamma}(0)) \\ &= \varphi(Q) - \varphi(P). \end{aligned}$$

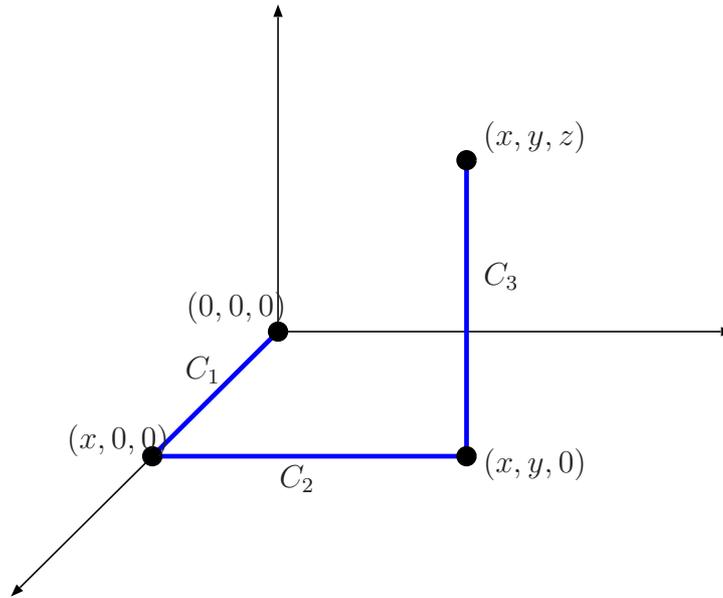
Por lo tanto, si  $\overline{F}$  admite un potencial, el trabajo depende solamente de los puntos inicial y final, y por lo tanto es conservativo.

Si  $\overline{F}$  admite un potencial ( $\overline{F} = \overline{\nabla} \varphi$ ) entonces  $\overline{F}$  es conservativo

Por otro lado, si  $\overline{F}$  es un campo vectorial conservativo, entonces las integrales de línea nos permiten construir un potencial para  $\overline{F}$ . Es decir, nos permiten construir una (o muchas) función escalar  $\varphi$  tal que  $\overline{F} = \overline{\nabla} \varphi$ . Basta fijar un punto  $O$  en el dominio de  $\overline{F}$  y definir  $\varphi(O) = 0$ . Luego, para cada  $P$  en el dominio de  $\overline{F}$  (que estamos suponiendo simplemente conexo) definir

$$\varphi(P) = \varphi(P) - \varphi(O) = \int_{\gamma_{OP}} \overline{F} \cdot d\overline{R},$$

Donde  $\overline{R}$  es una parametrización de la curva suave (a trozos)  $\gamma_{OP}$  que une  $O$  con  $P$ . Como  $\overline{F}$  es conservativo, el resultado da lo mismo a través de *cualquier* curva  $\gamma_{OP}$  que se elija. De esta manera resulta  $\overline{\nabla} \varphi = \overline{F}$ . Veamos como ejemplo que  $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, y, z) = F_3(x, y, z)$ , el resto de las igualdades se obtiene de manera análoga (utilizando otra curva  $C$ ).



Utilicemos como curva  $C$  la de la figura, entonces

$$\begin{aligned}
 \varphi(x, y, z) &= \int_C \overline{F} \cdot \tau \, ds \\
 &= \int_{C_1} \overline{F} \cdot \bar{i} \, ds + \int_{C_2} \overline{F} \cdot \bar{j} \, ds + \int_{C_3} \overline{F} \cdot \bar{k} \, ds \\
 &= \int_{C_1} F_1 \, ds + \int_{C_2} F_2 \, ds + \int_{C_3} F_3 \, ds \\
 &= \int_0^x F_1(s, 0, 0) \, ds + \int_0^y F_2(x, s, 0) \, ds + \int_0^z F_3(x, y, s) \, ds.
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, y, z) = F_3(x, y, z).$$

En conclusión, en un dominio simplemente conexo:

Todo campo conservativo es el gradiente de algún campo escalar.

Recordando ahora que el rotacional de un gradiente es siempre el vector nulo:

Todo campo conservativo es irrotacional.

El teorema de Stokes nos permite afirmar la recíproca:

Todo campo irrotacional es conservativo, y por consiguiente tiene un potencial  $\varphi$ .

En efecto, si  $\overline{F}$  es irrotacional, entonces  $\overline{\nabla} \times \overline{F} = \overline{0}$  y de aquí que

$$\oint \overline{F} \cdot d\overline{R} = \iint_S (\overline{\nabla} \times \overline{F}) \cdot \overline{n} \, d\sigma = 0,$$

para toda curva cerrada simple en el dominio. Entonces  $\overline{F}$  es conservativo y por consiguiente existe  $\varphi$  tal que  $\overline{F} = \overline{\nabla} \varphi$ . El campo escalar  $\varphi$  es *un potencial* para  $\overline{F}$ .