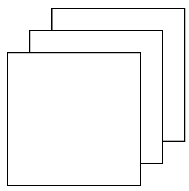
Capítulo 3

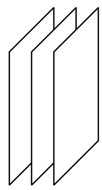
Coordenadas Generalizadas en el Espacio

Las coordenadas cartesianas usuales en $\mathbb{R}^3$ pueden verse también como un sistema de tres familias de superficies en el espacio, de modo que cada punto (físico) P pueda describirse como la intersección de tres superficies: una de cada familia.

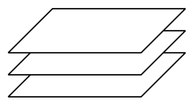
$$\mathcal{F}_1 = \{x_1 = \text{constante}\} = \{\text{planos frontales (paralelos al plano } x_2x_3)\}$$



$$\mathcal{F}_2 = \{x_2 = \text{constante}\} = \{\text{planos verticales (paralelos al plano } x_1x_3)\}$$



$$\mathcal{F}_3 = \{x_3 = \text{constante}\} = \{\text{planos horizontales (paralelos al plano } x_1x_2)\}$$



Tomando este punto de vista, dados tres campos escalares Q_1, Q_2, Q_3 en el espacio introducimos tres familias de superficies: las superficies de nivel de cada Q_i, $i = 1,2,3$. Ahora

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \{Q_1(x_1, x_2, x_3) = \text{constante}\} \\ \mathcal{F}_2 &= \{Q_2(x_1, x_2, x_3) = \text{constante}\} \\ \mathcal{F}_3 &= \{Q_3(x_1, x_2, x_3) = \text{constante}\}. \end{aligned}$$

Ver por ejemplo la Fig. 3.1

Si el punto físico P se representa por (x_1, x_2, x_3) en coordenadas cartesianas, entonces P se representa por (q_1, q_2, q_3) en coordenadas generalizadas, con

$$(1) \begin{cases} q_1 = Q_1(x_1, x_2, x_3) \\ q_2 = Q_2(x_1, x_2, x_3) \\ q_3 = Q_3(x_1, x_2, x_3) \end{cases} \quad \text{o inversamente} \quad (2) \begin{cases} x_1 = X_1(q_1, q_2, q_3) \\ x_2 = X_2(q_1, q_2, q_3) \\ x_3 = X_3(q_1, q_2, q_3) \end{cases}$$

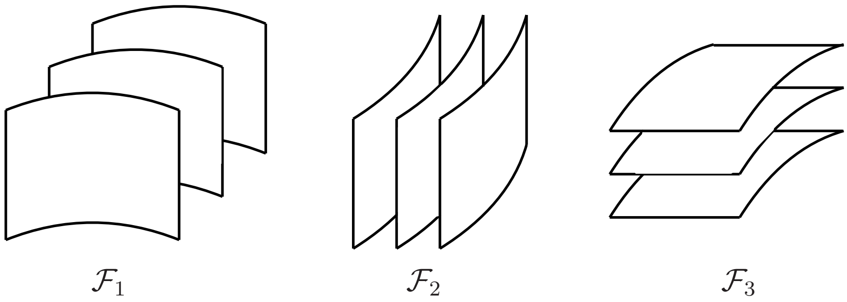
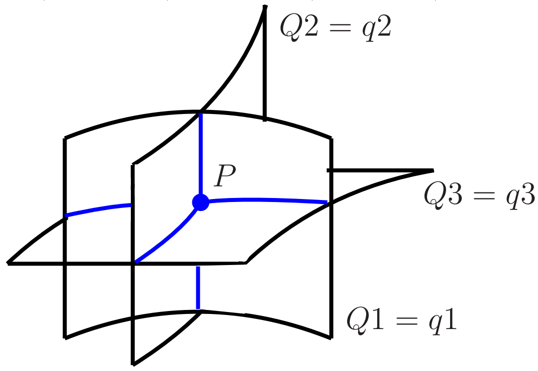


Figura 3.1: Ejemplo de familias $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$

Geométricamente, esto significa que el punto P, además de ser la intersección de tres planos (el frontal por x_1, el vertical por x_2 y el horizontal por x_3) también es la intersección de las superficies de nivel $Q_1(x_1, x_2, x_3) = q_1$, $Q_2(x_1, x_2, x_3) = q_2$, $Q_3(x_1, x_2, x_3) = q_3$:



Ejemplo 3.1. Si $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$, con $0 \leq r$, $0 \leq \theta < 2\pi$ y $0 \leq \varphi \leq \pi$, dados por las relaciones

$$\begin{cases} x_1 = X_1(r, \theta, \varphi) = r \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\ x_2 = X_2(r, \theta, \varphi) = r \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ x_3 = X_3(r, \theta, \varphi) = r \cos \varphi \end{cases}$$

tenemos el sistema de *coordenadas esféricas*. Describir y dibujar $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$.

Ejemplo 3.2. Si $q_1 = \rho$, $q_2 = \theta$, $q_3 = z$, con $0 \leq r$, $0 \leq \theta < 2\pi$ y $z \in \mathbb{R}$, dados por las relaciones

$$\begin{cases} x_1 = X_1(\rho, \theta, z) = \rho \cos \theta \\ x_2 = X_2(\rho, \theta, z) = \rho \operatorname{sen} \theta \\ x_3 = X_3(\rho, \theta, z) = z \end{cases}$$

tenemos el sistema de *coordenadas cilíndricas*. Describir y dibujar $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$.

3.1. Vectores normales

Denotaremos con $\overline{a}_i$ a un vector normal a las superficies de la familia $\mathcal{F}_i$ (perpendicular a cada superficie y de longitud uno) de manera que su dirección es la del crecimiento de Q_i.

Para hallar los vectores normales, lo más fácil es pensar desde un punto de vista geométrico o gráfico, y describirlos en las coordenadas generalizadas. Sobre todo teniendo en cuenta que encontrar la fórmula de $Q_i(x_1, x_2, x_3)$ no es en general tan sencillo, y sí tenemos a disposición las fórmulas de $X_i(q_1, q_2, q_3)$.

3.2. Cálculo de longitudes en coordenadas generalizadas

Sea $\overline{r}(t)$ una curva en el espacio que describe la trayectoria de una partícula. Si representamos la curva en coordenadas cartesianas ortogonales $\overline{r}(t) = x_1(t)\overline{i} + x_2(t)\overline{j} + x_3(t)\overline{k}$, para calcular la longitud de un arco cualquiera de la curva, necesitamos conocer $\left|\frac{d\overline{r}}{dt}(t)\right|$ ya que la longitud del arco que une $\overline{r}(a)$ con $\overline{r}(b)$ está dada por:

$$\int_C ds = \int_a^b \left|\frac{d\overline{r}}{dt}(t)\right| dt = \int_a^b \underbrace{\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2}\, dt}_{ds}.$$

Supongamos ahora que $q_j(t) = Q_j\big(\overline{r}(t)\big)$ son las coordenadas generalizadas de la curva, y tratemos de hallar una fórmula para $\left|\frac{d\overline{r}}{dt}(t)\right|^2$ en términos de las coordenadas $q_j(t)$. Observemos entonces que por la regla de la cadena

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(X_i(q_1(t), q_2(t), q_3(t))\right) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial X_i}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt}; \qquad i = 1, 2, 3.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 &= \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{\ell=1}^{3}\frac{\partial X_i}{\partial q_\ell}\frac{dq_\ell}{dt}\right)\left(\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial X_i}{\partial q_m}\frac{dq_m}{dt}\right)\\
&= \sum_{\ell=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial X_i}{\partial q_\ell}\frac{\partial X_i}{\partial q_m}\right)\frac{dq_\ell}{dt}\frac{dq_m}{dt}\\
&= \sum_{\ell=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} h_{\ell m}^2\frac{dq_\ell}{dt}\frac{dq_m}{dt},
\end{aligned}$$

con $h_{\ell m}^2 = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial X_i}{\partial q_\ell}\frac{\partial X_i}{\partial q_m}$.

Veamos ahora cuánto vale $h_{\ell m}^2$. Observemos primero que si definimos los vectores $\overline{V}_\ell$ por

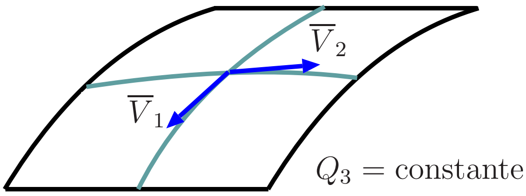
$$\overline{V}_\ell = \frac{\partial X_1}{\partial q_\ell}\overline{i} + \frac{\partial X_2}{\partial q_\ell}\overline{j} + \frac{\partial X_3}{\partial q_\ell}\overline{k}$$

entonces por un lado $h_{\ell m}^2 = \overline{V}_\ell \cdot \overline{V}_m$, y por otro lado:

$\overline{V}_1$ es el vector tangente a (la intersección de) las superficies $Q_2 =$ constante y $Q_3 =$ constante,

$\overline{V}_2$ es el vector tangente a (la intersección de) las superficies $Q_3 =$ constante y $Q_1 =$ constante,

$\overline{V}_3$ es el vector tangente a (la intersección de) las superficies $Q_1 =$ constante y $Q_2 =$ constante.



Si $\ell \neq m$, al tomar las derivadas parciales que definen $h_{\ell m}^2$ estamos pensando que la otra variable q_j restante permanece constante. Por ejemplo, si $\ell = 1$, $m = 2$, tenemos $Q_3 =$ constante. El producto escalar de $\overline{V}_\ell$ y $\overline{V}_m$ es nulo **si las superficies son perpendiculares** (las correspondientes a familias distintas), pero $\overline{V}_\ell \cdot \overline{V}_m = h_{\ell m}^2$. Por consiguiente, bajo el supuesto de la perpendicularidad de las superficies de las familias $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ y $\mathcal{F}_3$, tenemos que $h_{\ell m}^2 = 0$ cuando $\ell \neq m$. Entonces, denotando con $h_\ell = h_{\ell\ell}$ tenemos:

$$\boxed{\left|\frac{d\overline{r}(t)}{dt}\right|^2 = \sum_{\ell=1}^{3} h_\ell^2 \left(\frac{dq_\ell}{dt}\right)^2; \qquad h_\ell^2 = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial X_i}{\partial q_\ell}\right)^2.}$$

En forma sintética, la fórmula obtenida para calcular longitudes de curvas en las coordenadas generalizadas puede escribirse

$$\begin{aligned}(ds)^2 &= (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2\\ &= (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2\\ &= (h_1 dq_1)^2 + (h_2 dq_2)^2 + (h_3 dq_3)^2,\end{aligned}$$

donde ds representa el diferencial de longitud de arco. Lo que esta fórmula sintetiza es el hecho que si pretendemos calcular la longitud de una curva C que se describe por $(q_1(t), q_2(t), q_3(t))$ en coordenadas generalizadas, entonces el camino recorrido entre los instantes a y b está dado por

$$\int_C ds = \int_a^b \sqrt{(h_1\frac{dq_1}{dt})^2 + (h_2\frac{dq_2}{dt})^2 + (h_3\frac{dq_3}{dt})^2}\, dt$$

con $h_\ell = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial X_i}{\partial q_\ell}\right)^2}$.

Ejemplo 3.3. Considerar las coordenadas esféricas del Ejemplo 3.1.

1. Calcular h_1, h_2, h_3.

2. Calcular la longitud de un paralelo cualquiera en la esfera de radio 4 (dado por $\varphi = \text{constante}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, y $r = 4$).

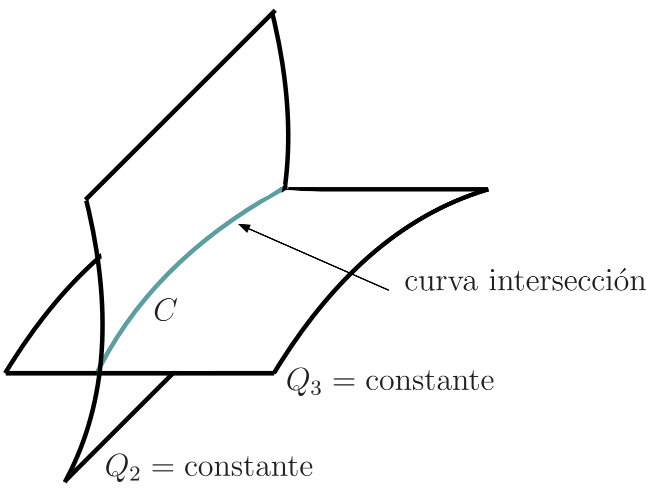
   Notar que para obtener la longitud de cualquier paralelo, se debe calcular una integral entre 0 y 2π. Sin embargo los resultados dependen de $q_1 = r$ y $q_3 = \varphi$. Aquí queda un poco más claro lo que significa h_2: mide cuánto *se estira* el segmento $[0, 2\pi]$ cuando se deforma para describir un *paralelo* de la esfera.

Ejemplo 3.4. Considerar las *coordenadas cilíndricas* del Ejemplo 3.2.

1. Calcular h_1, h_2, h_3.

2. Calcular la longitud de la hélice $\theta(t) = t$, $r(t) = R$, $z(t) = t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Algunas curvas son particularmente importantes en un sistema de coordenadas generalizadas. Por ejemplo, si q_2 y q_3 son constantes, tenemos la curva de intersección de dos superficies, una de la familia $\mathcal{F}_2$ y otra de la familia $\mathcal{F}_3$.



$$ds_1 = h_1 dq_1.$$

Para una curva como C en el dibujo, el diferencial de longitud es $ds_1 = h_1 dq_1$. Si q_1 y q_3 son constantes tenemos $ds_2 = h_2 dq_2$, y si q_1 y q_2 son constantes tenemos $ds_3 = h_3 dq_3$.

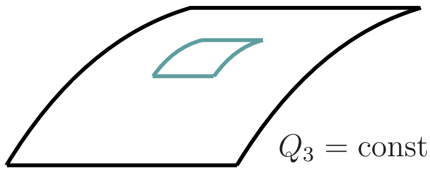
La cantidad h_i indica cuánto se estira o encoge la longitud de un intervalo cuando se deforma para describir una curva coordenada.

Ejemplo 3.5. Describir todos los tipos de *curvas coordenadas* en los sistemas cartesianos, esféricos y cilíndricos.

3.3. Cálculo de áreas de *superficies coordenadas* en coordenadas generalizadas

Si q_3 es constante y queremos aproximar el área de un rectángulo curvilíneo como el del dibujo, construido con *curvas coordenadas* dentro de la superficie $Q_3 =$ constante, tendremos

$$d\sigma_{12} = ds_1\, ds_2 = h_1\, h_2\, dq_1\, dq_2.$$



De un modo análogo, si $Q_2 =$ constante, $d\sigma_{13} = ds_1\, ds_3 = h_1\, h_3\, dq_1\, dq_3$.
Y si $Q_3 =$ constante, $d\sigma_{12} = ds_1\, ds_2 = h_1\, h_2\, dq_1\, dq_2$.

La cantidad σ_{ij} indica cuánto se estira o encoge el área de un rectángulo cuando se deforma para describir una superficie coordenada.

Ejemplo 3.6. Calcular los tres $d\sigma$ en coordenadas cartesianas, esféricas y cilíndricas.

Ejemplo 3.7. Utilizando coordenadas esféricas.

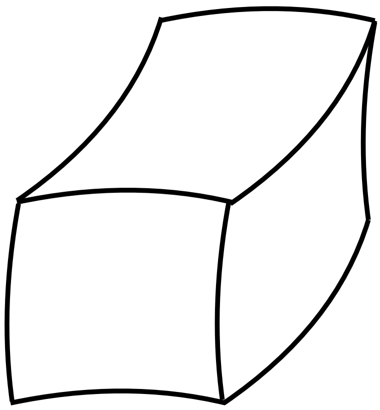
1. Calcular el área de la superficie esférica de radio R.
2. Calcular el área del casquete esférico de apertura $\varphi = \pi/4$.

3.4. Cálculo de volúmenes de *cubos* con aristas que sean *curvas coordenadas*

Análogamente a lo anterior, ahora tenemos que

$$dv = d\text{vol} = ds_1\, ds_2\, ds_3 = h_1\, h_2\, h_3\, dq_1\, dq_2\, dq_3.$$

La cantidad $h_1 h_2 h_3$ indica cuánto se estira o encoge el volumen de un cubo cuando se deforma para describir un cubo coordenado.



Ejemplo 3.8. Calcular $d$vol para las coordenadas cartesianas, esféricas y cilíndricas.

Ejemplo 3.9. Utilizando coordenadas esféricas.

1. Calcular el volumen de la bola de radio R.
2. Calcular el volumen del cono esférico de apertura $\varphi = \pi/4$.

3.5. Los operadores diferenciales en coordenadas generalizadas

Gradiente. Si ψ es un campo escalar en el espacio, entonces

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}\psi(q_1,q_2,q_3) &= \overline{a}_1\big(\overline{\nabla}\psi(q_1,q_2,q_3)\cdot\overline{a}_1\big) + \overline{a}_2\big(\overline{\nabla}\psi(q_1,q_2,q_3)\cdot\overline{a}_2\big) + \overline{a}_3\big(\overline{\nabla}\psi(q_1,q_2,q_3)\cdot\overline{a}_3\big)\\
&= \overline{a}_1\frac{\partial\psi}{\partial s_1} + \overline{a}_2\frac{\partial\psi}{\partial s_2} + \overline{a}_3\frac{\partial\psi}{\partial s_3}\\
&= \overline{a}_1\frac{1}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1} + \overline{a}_2\frac{1}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2} + \overline{a}_3\frac{1}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial q_3}. \qquad\qquad (ds_i = h_i\,dq_i).
\end{aligned}$$

Divergencia. Si $\overline{V}$ es un campo vectorial en el espacio, expresado en términos de los vectores normales a_i,

$$\overline{V} = V_1\overline{a}_1 + V_2\overline{a}_2 + V_3\overline{a}_3,$$

entonces

$$\overline{\nabla}\cdot\overline{V}(q_1,q_2,q_3) = \frac{1}{h_1\,h_2\,h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(V_1h_2h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(V_2h_3h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(V_3h_1h_2).\right]$$

Esto se demuestra usando que $\overline{\nabla}\cdot\overline{V} = \operatorname{lím}\frac{1}{\operatorname{vol}R}\iint_{\partial R}\overline{V}\cdot\overline{n}\,d\sigma$, con R cubos coordenados con *lados coordenados* tendiendo a cero.

Laplaciano. Si ψ es un campo escalar en el espacio, combinando las definiciones de gradiente y divergencia, recordando que $\overline{\nabla}^2\psi = \overline{\nabla}\cdot\left[\overline{\nabla}\psi\right]$, obtenemos

$$\overline{\nabla}^2\psi(q_1,q_2,q_3) = \frac{1}{h_1\,h_2\,h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}) + \frac{\partial}{\partial q_2}(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}) + \frac{\partial}{\partial q_3}(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial q_3})\right]$$

Rotor. Si $\overline{V}$ es un campo vectorial en el espacio

$$\overline{\nabla}\times\overline{V}(q_1,q_2,q_3) = \frac{1}{h_1\,h_2\,h_3}\begin{vmatrix}\overline{a}_1h_1 & \overline{a}_2h_2 & \overline{a}_3h_3\\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3}\\ h_1V_1 & h_2V_2 & h_3V_3\end{vmatrix}$$

Ejemplo 3.10. Escribir el laplaciano de un campo escalar en coordenadas cartesianas, esféricas y cilíndricas.