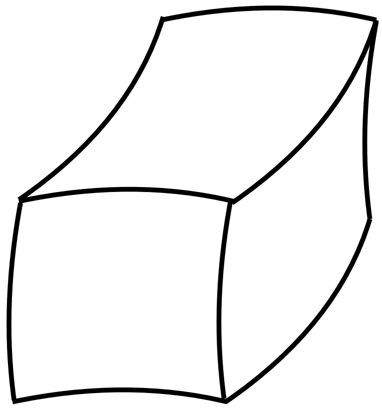
4.6. Cálculo de volúmenes de *cubos* con aristas que sean *curvas coordenadas*



Análogamente a lo anterior, ahora tenemos que

$$dv = d\text{vol} = ds_1\, ds_2\, ds_3 = h_1\, h_2\, h_3\, dq_1\, dq_2\, dq_3.$$

La cantidad $h_1 h_2 h_3$ indica cuánto se estira o encoge el volumen de un cubo cuando se deforma para describir un cubo coordenado.

Ejemplo 4.8. Calcular $d$vol para las coordenadas cartesianas, esféricas y cilíndricas.

Ejemplo 4.9. Utilizando coordenadas esféricas.

1. Calcular el volumen de la bola de radio R.
2. Calcular el volumen del cono esférico de apertura $\varphi = \pi/4$.

4.7. Los operadores diferenciales en coordenadas generalizadas

Gradiente. La idea es ahora escribir el gradiente de un campo escalar que viene dado en coordenadas generalizadas, como una combinación lineal de los vectores normales $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$. Entendiendo que el gradiente es el vector que apunta en la dirección de máximo crecimiento de la función escalar considerada.

Si ψ es un campo escalar en el espacio, entonces

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}\psi(q_1,q_2,q_3) &= \overline{a}_1\big(\overline{\nabla}\psi(q_1,q_2,q_3)\cdot\overline{a}_1\big) + \overline{a}_2\big(\overline{\nabla}\psi(q_1,q_2,q_3)\cdot\overline{a}_2\big) + \overline{a}_3\big(\overline{\nabla}\psi(q_1,q_2,q_3)\cdot\overline{a}_3\big)\\ &= \overline{a}_1\frac{1}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1} + \overline{a}_2\frac{1}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2} + \overline{a}_3\frac{1}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial q_3}.\end{aligned}$$

En la última igualdad hemos usado que $\overline{\nabla}\psi(q_1,q_2,q_3)\cdot\overline{a}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial\psi}{\partial q_i}$, $i = 1,2,3$, lo que puede verse a partir del siguiente razonamiento. Supongamos que $\psi(q_1,q_2,q_3)$ y $\Psi(x_1,x_2,x_3)$ denotan dos fórmulas para el campo escalar ψ que coinciden en cada punto físico del espacio tridimensional, es decir

$$\psi(q_1,q_2,q_3) = \Psi(x_1,x_2,x_3)$$

siempre que (q_1,q_2,q_3) y (x_1,x_2,x_3) se relacionen a través de las fórmulas (1) y (2). Más precisamente

$$\psi(q_1,q_2,q_3) = \Psi\big(X_1(q_1,q_2,q_3), X_2(q_1,q_2,q_3), X_3(q_1,q_2,q_3)\big).$$

Luego, el gradiente del campo escalar es

$$\overline{\nabla}\Psi(x_1,x_2,x_3) = \frac{\partial \Psi}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3)\,\bar{i} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2}(x_1,x_2,x_3)\,\bar{j} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3)\,\bar{k}.$$

Por otro lado, por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial q_i} &= \frac{\partial \Psi}{\partial x_1}\frac{\partial X_1}{\partial q_i} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_2}\frac{\partial X_2}{\partial q_i} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_3}\frac{\partial X_3}{\partial q_i} \\ &= \overline{\nabla}\Psi \cdot \frac{\partial \overline{X}}{\partial q_i} = \overline{\nabla}\Psi \cdot (h_i \overline{a}_i),\end{aligned}$$

donde hemos usado que $\dfrac{\partial \overline{X}}{\partial q_i} = \dfrac{\partial X_1}{\partial q_i}\bar{i} + \dfrac{\partial X_2}{\partial q_i}\bar{j} + \dfrac{\partial X_3}{\partial q_i}\bar{k}$, y $h_i = \left|\dfrac{\partial \overline{X}}{\partial q_i}\right|$ (ver Sección 4.3). Finalmente,

$$\frac{\partial \psi}{\partial q_i} = h_i \overline{\nabla}\Psi \cdot \overline{a}_i,$$

o, lo que es lo mismo

$$\overline{\nabla}\Psi \cdot \overline{a}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \psi}{\partial q_i}.$$

Divergencia. Si $\overline{V}$ es un campo vectorial en el espacio, expresado en términos de los vectores normales a_i,

$$\overline{V} = V_1\overline{a}_1 + V_2\overline{a}_2 + V_3\overline{a}_3,$$

entonces

$$\overline{\nabla} \cdot \overline{V}(q_1,q_2,q_3) = \frac{1}{h_1\,h_2\,h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(V_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(V_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(V_3 h_1 h_2).\right]$$

Esto se demuestra usando que $\overline{\nabla} \cdot \overline{V} = \lim \frac{1}{\operatorname{vol} R} \iint_{\partial R} \overline{V} \cdot \overline{n}\, d\sigma$, con R cubos coordenados con *lados coordenados* tendiendo a cero.

En efecto... completar haciendo la demostración.

Laplaciano. Si ψ es un campo escalar en el espacio, combinando las definiciones de gradiente y divergencia, recordando que $\overline{\nabla}^2\psi = \overline{\nabla} \cdot \left[\overline{\nabla}\psi\right]$, obtenemos

$$\overline{\nabla}^2\psi(q_1,q_2,q_3) = \frac{1}{h_1\,h_2\,h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial \psi}{\partial q_1}) + \frac{\partial}{\partial q_2}(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial \psi}{\partial q_2}) + \frac{\partial}{\partial q_3}(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial \psi}{\partial q_3})\right]$$

Rotor. Si $\overline{V}$ es un campo vectorial en el espacio

$$\overline{\nabla} \times \overline{V}(q_1,q_2,q_3) = \frac{1}{h_1\,h_2\,h_3}\begin{vmatrix} \overline{a}_1 h_1 & \overline{a}_2 h_2 & \overline{a}_3 h_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 V_1 & h_2 V_2 & h_3 V_3 \end{vmatrix}$$

Ejemplo 4.10. Escribir el laplaciano de un campo escalar en coordenadas cartesianas, esféricas y cilíndricas.

Capítulo 5

Leyes de conservación. Ecuaciones constitutivas

5.1. Leyes de conservación. Balance

Sea Ω una región del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\partial\Omega$ su frontera, que suponemos suave a trozos. Estamos interesados en describir (cuantitativamente) la evolución espacio-temporal de una cantidad U en Ω. Por ejemplo, la energía térmica, la masa de un compuesto, etc. La ley de conservación básica establece el hecho casi obvio siguiente:

$$\begin{array}{c}\text{razón de cambio}\\ \text{temporal de } U\end{array} = \begin{array}{c}\text{razón de inmigración}\\ \text{menos}\\ \text{razón de emigración}\\ \text{a través de } \partial\Omega\end{array} + \begin{array}{c}\text{razón de creación}\\ \text{menos}\\ \text{razón de desaparición}\\ \text{dentro de } \Omega.\end{array} \tag{5.1}$$

Supondremos, para fijar ideas, que $U = E$ es energía térmica. Más precisamente, suponemos que si $E = E(\Omega; t)$ es la energía térmica en la región Ω a tiempo t, entonces la *densidad de energía térmica* $e = e(x_1, x_2, x_3; t)$ es la *propiedad intensiva* asociada a E y se relacionan de la siguiente manera:

$$E(\Omega; t) = \iiint_\Omega e(x_1, x_2, x_3; t)\, d\mathrm{vol}$$

La cantidad $e(x_1, x_2, x_3; t)$ también se denomina *energía térmica por unidad de volumen* en el punto (x_1, x_2, x_3) de Ω en el instante t. Con esta notación resulta

$$\begin{array}{c}\text{razón de cambio}\\ \text{temporal de } U\end{array} = \frac{d}{dt}E(\Omega; t) = \frac{d}{dt}\iiint_\Omega e(x_1, x_2, x_3; t)\, d\mathrm{vol}$$

Llamemos $\overline{\phi}(x_1, x_2, x_3; t)$ al campo vectorial de velocidades de desplazamiento de la energía térmica, de manera que:

$$\iint_S \overline{\phi}(x_1, x_2, x_3; t) \cdot \overline{n}\, d\sigma = \begin{array}{c}\text{cantidad de energía térmica}\\ \text{que atraviesa la superficie } S\\ \text{en la dirección que apunta } \overline{n}\\ \text{por unidad de tiempo.}\end{array}$$

($\overline{\phi}(x_1, x_2, x_3; t)$ es el flujo de energía térmica por unidad de área en el punto (x_1, x_2, x_3) a tiempo t). Por lo tanto, si $\overline{n}$ es el vector normal a $\partial\Omega$ que apunta hacia fuera de Ω,

$$\begin{array}{c}\text{razón de inmigración}\\ \text{menos}\\ \text{razón de emigración}\\ \text{a través de } \partial\Omega\end{array} = -\iint_{\partial\Omega} \overline{\phi}(x_1, x_2, x_3; t) \cdot \overline{n}\, d\sigma$$

La creación y aniquilación de la cantidad E en Ω (que en el caso de energía térmica puede corresponder a reacciones químicas exotérmicas o endotérmicas respectivamente) está dada por una función $f(x_1, x_1, x_3; t)$ definida en Ω. La función f tiene signo arbitrario. En los puntos e instantes donde sea positiva tendremos *fuentes* de energía, mientras que cuando sea negativa tendremos *sumideros* de energía. La función f es una tasa de creación/aniquilación de energía por unidad de volumen por unidad de tiempo, de manera que

$$\begin{array}{c}\text{razón de creación}\\ \text{menos}\\ \text{razón de desaparición}\\ \text{dentro de } \Omega\end{array} = \iiint_{\Omega} f(x_1, x_2, x_3; t)\, d\text{vol}$$

Con estas tres magnitudes básicas, la *ley de conservación* y el Teorema de Gauss, podemos establecer una relación cuantitativa precisa entre e, $\overline{\phi}$ y f.

Sea $\overline{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ un punto fijo en Ω y sea $B = B(\overline{x}^0, r)$ una bolita chica centrada en $\overline{x}^0$ de manera que $\overline{B(\overline{x}^0, r)} \subset \Omega$. Consideremos el balance en B.

$$\begin{array}{c}\text{razón de cambio}\\ \text{temporal de } E \text{ en } B\end{array} = \frac{d}{dt} E(B; t) = \frac{d}{dt} \iiint_B e(x_1, x_2, x_3; t)\, d\text{vol}$$

$$\begin{array}{c}\text{razón de inmigración/emigración}\\ \text{a través de } \partial B\end{array} = -\iint_{\partial B} \overline{\phi}(x_1, x_2, x_3; t) \cdot \overline{n}\, d\sigma$$

$$\begin{array}{c}\text{razón de creación/desaparición}\\ \text{dentro de } B\end{array} = \iiint_B f(x_1, x_2, x_3; t)\, d\text{vol}$$

Por el enunciado *verbal* del balance (5.1) tenemos que

$$\frac{d}{dt} \iiint_B e(x_1, x_2, x_3; t)\, d\text{vol} = -\iint_{\partial B} \overline{\phi}(x_1, x_2, x_3; t) \cdot \overline{n}\, d\sigma + \iiint_B f(x_1, x_2, x_3; t)\, d\text{vol} \quad (5.2)$$

Por el Teorema de la Divergencia de Gauss, el primer término en el miembro derecho de la ecuación anterior es:

$$-\iint_{\partial B} \overline{\phi}(x_1, x_2, x_3; t) \cdot \overline{n}\, d\sigma = -\iiint_B \overline{\nabla} \cdot \overline{\phi}(x_1, x_2, x_3; t)\, d\text{vol},$$

donde $\overline{\nabla} \cdot \overline{\phi}$ es, claro, la divergencia del flujo térmico. Si e es una función *suave*, como la derivación en el miembro izquierdo de (5.2) es con respecto a la variable tiempo, que no es la de integración, y como estamos considerando una bola B fija que no depende de la variable temporal, tenemos también que

$$\frac{d}{dt}\iiint_B e(x_1, x_2, x_3; t)\,d\mathrm{vol} = \iiint_B \frac{\partial}{\partial t} e(x_1, x_2, x_3; t)\,d\mathrm{vol}.$$

Finalmente, la ecuación (5.2) se reescribe

$$\iiint_B \left[\frac{\partial}{\partial t} e(x_1, x_2, x_3; t) + \overline{\nabla} \cdot \overline{\phi}(x_1, x_2, x_3; t) - f(x_1, x_2, x_3; t)\right] d\mathrm{vol} = 0.$$

Esta igualdad debe cumplirse para toda bola B tal que $\overline{B} \subset \Omega$. Si e y $\overline{\phi}$ son de clase C^1 y si f es continua, entonces la función entre corchetes es continua, y por lo visto en el Capítulo 1 se tiene que cumplir que

$$\frac{\partial}{\partial t} e(x_1, x_2, x_3; t) + \overline{\nabla} \cdot \overline{\phi}(x_1, x_2, x_3; t) - f(x_1, x_2, x_3; t) = 0$$

para todo $(x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ y todo t.

La *ley de conservación* (de la energía) es entonces la ecuación diferencial en derivadas parciales de primer orden dada por

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \overline{\nabla} \cdot \overline{\phi} = f. \tag{5.3}$$

Observación 5.1. Una ley de conservación similar se cumple si C representa una *concentración*, que es también una densidad de masa de una cierta sustancia, por unidad de volumen:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \overline{\nabla} \cdot \overline{\phi} = f. \tag{5.4}$$

En este caso $\overline{\phi}$ es el flujo de masa por unidad de área, y f es un término fuente de masa por unidad de volumen por unidad de tiempo.

5.2. Relaciones constitutivas

Supongamos ahora que denotamos con:

- $u = u(x_1, x_2, x_3; t)$ a la temperatura en el punto $(x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ en el instante t;
- $\rho = \rho(x_1, x_2, x_3)$ a la densidad (de masa) del medio en el punto (x_1, x_2, x_3) de Ω;
- $c = c(x_1, x_2, x_3)$ al calor específico del medio en el punto (x_1, x_2, x_3) de Ω. Se denomina calor específico a la energía térmica necesaria para aumentar *un grado un gramo* de la sustancia que constituye el medio en el punto (x_1, x_2, x_3)).

Entonces

$$e = c\rho u.$$

La ley de conservación toma pues la forma

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \overline{\nabla} \cdot \overline{\phi} = f,$$

donde c, ρ y f son generalmente datos del problema, y u, $\overline{\phi}$ son las incógnitas.

Es claro que teniendo una sola ecuación, el problema de encontrar u y $\overline{\phi}$ no está suficientemente determinado. Las ecuaciones de balance, o leyes de conservación tienen que acoplarse con *relaciones constitutivas* que describen, cuantitativamente relaciones entre $\overline{\phi}$ y u. La relación constitutiva para la conducción del calor se llama Ley de Fourier y es elemental desde el punto de vista heurístico: "La energía térmica fluye desde las regiones más calientes hacia las más frías y la magnitud del flujo es proporcional a la razón de cambio (espacial) de la temperatura". En otros términos (más concretos),

$$\overline{\phi} = -K\overline{\nabla}u,$$

donde $K = K(x_1, x_2, x_3)$ se llama conductividad térmica del material y puede ser diferente en puntos diferentes. Es claro que a mayor K, mayor flujo $|\overline{\phi}|$. Notar que el signo menos, admitiendo que K es positiva, está para satisfacer el requerimiento de dirección del flujo: "de altas a bajas temperaturas" que es lo opuesto de la dirección del gradiente de u.

El sistema

$$\begin{cases} \text{Ley de Conservación} \\ \text{Relación Constitutiva} \end{cases}$$

nos da

$$\begin{cases} c\,\rho\,\dfrac{\partial u}{\partial t} + \overline{\nabla}\cdot\overline{\phi} = f, \\ \qquad\qquad \overline{\phi} = -K\overline{\nabla}u. \end{cases}$$

Sustituyendo la segunda en la primera, obtenemos la forma general de la ecuación de difusión o ecuación del calor en el espacio tridimensional:

$$c\,\rho\,\frac{\partial u}{\partial t} - \overline{\nabla}\cdot(K\overline{\nabla}u) = f. \tag{5.5}$$

Recordemos que c, ρ y K son funciones del punto.

Cuando la conductividad térmica K es constante, la ecuación toma la forma

$$c\,\rho\,\frac{\partial u}{\partial t} - K\overline{\nabla}^2 u = f.$$

Cuando no hay fuentes (ni sumideros) y también el calor específico y la densidad son constantes, tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\overline{\nabla}^2 u = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right)$$

con $k = \dfrac{K}{c\,\rho}$ la *difusividad* del material.

Observación 5.2. Cuando consideramos una concentración (de masa) C en lugar de una temperatura, o densidad de energía térmica, la relación constitutiva que relaciona C con el flujo $\overline{\phi}$ se denomina *Ley de Fick*:

$$\overline{\phi} = -k\overline{\nabla}C,$$

que es igual a la de Fourier. Incorporando esta relación constitutiva en la ley de conservación obtenemos:

$$\frac{\partial C}{\partial t} - \overline{\nabla}\cdot(k\overline{\nabla}C) = f.$$

Obtuvimos la misma ecuación para la incógnita C que habíamos obtenido anteriormente para la incógnita u. Esta ecuación se denomina *ecuación de difusión* y modela tanto difusión de calor como de masa.

5.3. Reducción de dimensiones

Volvamos a la ecuación del calor. Cuando hay razones físicas para predecir la independencia de la temperatura de algunas de las variables x_1, x_2, x_3 se tienen versiones de la ecuación del calor en dimensiones uno (varillas) y dos (placas), pero esto no implica, necesariamente la unidimensionalidad, o bidimensionalidad del medio en el que está ocurriendo el proceso de difusión.

Ecuación del calor unidimensional: Si consideramos una varilla de pequeño espesor, aislada lateralmente, y alineada con el eje x_1, resulta un modelo válido al suponer que todas las cantidades son constantes sobre planos paralelos al plano x_2x_3. Por lo tanto obtenemos la ecuación:

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_1}(K\frac{\partial u}{\partial x_1})}_{=\overline{\nabla}\cdot(K\overline{\nabla}u)} = f,$$

con $u = u(x_1; t)$ y $f = f(x_1; t)$. En este caso el flujo $\overline{\phi} = \Big(-K\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, 0, 0\Big)$, y suele definirse directamente el *flujo escalar* $\phi = -K\dfrac{\partial u}{\partial x_1}$, interpretando que el flujo es hacia la derecha cuando $\phi > 0$ y hacia la izquierda cuando $\phi < 0$.

Llamando x a x_1 (ya que es la única variable de interés) obtenemos

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u}{\partial x}\right) = f,$$

que también podemos escribir

$$c\rho u_t - (Ku_x)_x = f.$$

En el caso en que los coeficientes c, ρ y K son constantes, y llamando $\tilde{f}$ a $\dfrac{f}{c\rho}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \tilde{f},$$

o, lo que es lo mismo

$$u_t - ku_{xx} = \tilde{f}.$$

Ecuación del calor bidimensional: Si consideramos una placa plana delgada, alineada con el plano x_1x_2, aislada en su parte superior e inferior, es válido suponer que todas las cantidades son constantes sobre rectas paralelas al eje x_3 y obtenemos la ecuación:

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} - \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(K\frac{\partial u}{\partial x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(K\frac{\partial u}{\partial x_2})\right]}_{=\overline{\nabla}\cdot(K\overline{\nabla}u)} = f$$

con $u = u(x_1, x_2; t)$ y $f = f(x_1, x_2; t)$. En el caso en que los coeficientes c, ρ y K son constantes, y llamando x, y a x_1, x_2 respectivamente obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \tilde{f},$$

o, lo que es lo mismo

$$u_t - k\big(u_{xx} + u_{yy}\big) = \tilde{f}.$$

5.4. Condiciones iniciales y de borde

Cuando intentemos resolver la ecuación del calor en una región delimitada, por ejemplo, correspondiente a un objeto con una cierta forma y con ciertas propiedades físicas, necesitaremos agregar al problema ciertas *condiciones iniciales* (CI) y *de borde* (CB).

Consideremos entonces, para fijar ideas que tenemos un objeto conductor del calor (por ejemplo un metal), que ocupa una región Ω del espacio.

Quisiéramos usar la ecuación del calor para calcular soluciones y predecir temperaturas futuras, o calcular temperaturas en puntos del objeto donde no podemos medir.

Como la ecuación del calor tiene *una* derivada con respecto al tiempo t, debemos proveer una *condición inicial* (CI), usualmente a tiempo $t = 0$: la temperatura inicial. Es posible que la temperatura inicial no sea constante, sino que dependa de $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Luego, debemos proveer una *distribución* inicial de temperatura

$$u(\overline{x}; 0) = f(\overline{x}), \qquad \overline{x} \in \Omega,$$

o, de otra manera

$$u(x_1, x_2, x_3; 0) = f(x_1, x_2, x_3), \qquad (x_1, x_2, x_3) \in \Omega.$$

¿Es esta información suficiente para predecir la temperatura en el futuro? La respuesta es no. Sabemos la distribución de temperatura inicial y sabemos que la temperatura cambia acorde a la ecuación diferencial parcial (5.5). Pero aún nos falta saber qué ocurre en el borde del objeto Ω. Sin esta información, no podemos predecir el futuro.

Los siguientes tipos de condiciones de borde son los más usuales:

Temperatura prescripta. En ciertas situaciones, puede suponerse que la temperatura en el borde del objeto (o en parte del borde) se conoce o está predeterminada y es igual a $u_B(\overline{x}; t)$ en el punto $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ de $\partial\Omega$ en el instante t. En este caso, la condición de borde se escribe

$$u(\overline{x}; t) = u_B(\overline{x}; t), \qquad \overline{x} \in \partial\Omega, \quad t \geq 0. \tag{5.6}$$

Una situación física que puede representarse on esta CB es el caso en que $u_B(t)$ es la temperatura de un baño de fluido con el cual el objeto está en contacto.

Otra situación donde esta condición de borde puede ser útil es cuando se conoce la temperatura de un objeto en todos los puntos de su *borde* y quiere utilizarse la ecuación del calor para (una vez resuelta) conocer la temperatura en todos los puntos interiores. Por ejemplo, cuando sumergimos un ñoqui en agua hirviendo, todos los puntos del borde del ñoqui estarán a 100°C, podemos utilizar la ecuación del calor para saber cuándo las partes del ñoqui más centrales llegan a 99°C. En este caso, la condición de borde será

$$u(\overline{x};t) = 100, \qquad \overline{x} \in \partial\Omega, \quad t \geq 0.$$

La condición de borde en que se prescribe el valor de la incógnita u se denomina condición de borde de tipo *Dirichlet.*

Flujo prescripto. En otras situaciones es posible suponer que se conoce (o está prescripto) el *flujo de calor* en lugar de la temperatura, es decir

$$-K(\overline{x}) \underbrace{\overline{\nabla} u(\overline{x};t) \cdot \overline{n}}_{\dfrac{\partial u}{\partial \overline{n}}} = \varphi(\overline{x};t), \qquad \overline{x} \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \tag{5.7}$$

donde $\varphi(\overline{x};t)$ es una función conocida o dada, y $\overline{n}$ es el vector normal exterior a $\partial\Omega$.

El ejemplo más simple de flujo de calor prescripto en la frontera es cuando el borde está *perfectamente aislado.* En este caso no hay flujo en la frontera ($\varphi \equiv 0$), y la condición de borde se escribe

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{n}}(\overline{x};t) = 0, \qquad \overline{x} \in \partial\Omega, \quad t \geq 0. \tag{5.8}$$

La condición de borde en que se prescribe el valor de la *derivada normal* de la incógnita u se denomina condición de borde de tipo *Neumann.*

Ley de enfriamiento de Newton. Cuando el objeto está en contacto con un fluido en movimiento (aire, agua, aceite, etc.), entonces las condiciones hasta ahora vistas no parecen del todo apropiadas. Por ejemplo, imaginemos un objeto que está caliente, y en contacto con aire en movimiento. El calor saldrá del objeto, calentando el aire. Y el aire se llevará el calor por el movimiento mismo. Experimentos muestran que el flujo de calor que sale del objeto es proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto ($u(\overline{x};t)$) y la temperatura del fluido exterior ($u_B(t)$). Esta condición de frontera se llama *Ley de enfriamiento de Newton.* Si la queremos escribir en términos matemáticos resulta

$$-K(\overline{x})\frac{\partial u}{\partial \overline{n}}(\overline{x};t) = H[u(\overline{x};t) - u_B(t)], \quad \overline{x} \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \tag{5.9}$$

donde la constante de proporcionalidad H se llama *coeficiente de transferencia de calor* o coeficiente de convección. Esta condición de borde involucra una combinación lineal de u y $\dfrac{\partial u}{\partial \overline{n}}$.

El coeficiente H en la ley de enfriamiento de Newton se determina experimentalmente. Depende de las propiedades del objeto como así también de las del fluido (inclusive de la velocidad con la que el fluido se mueve). Si el coeficiente es muy pequeño, muy poca energía fluye a través del borde. En el límite $H \to 0$, la ley de enfriamiento de Newton, se convierte en la condición de borde aislado. Podemos pensar que la ley de Newton con $H \neq 0$ representa un extremo que no está perfectamente aislado.

Cuando H es grande, *mucha* energía fluye a través del extremo. En el límite $H \to \infty$, la condición de borde se transforma en la condición de temperatura prescripta $u(\overline{x}, t) = u_B(t)$. Esto puede verse fácilmente si dividimos (5.9) por H:

$$-\frac{K(\overline{x})}{H}\frac{\partial u}{\partial \overline{n}}(\overline{x}, t) = u(\overline{x}, t) - u_B(t),$$

y tomamos límite cuando $H \to \infty$.

> La condición de borde en que se relaciona el valor de la derivada normal $\dfrac{\partial u}{\partial \overline{n}}$ con la diferencia entre u y un dato u_B se denomina condición de borde de tipo *Robin*.

Observación 5.3. Cuando consideramos el flujo de calor *unidimensional*, por ejemplo en una barra cilíndrica de longitud L, las condiciones de borde se escriben de la siguiente manera:

	Dirichlet	Neumann	Robin
$x = 0$	$u(0, t) = u_B(t)$	$-K_0(0)u_x(0, t) = \phi(t)$	$-K_0(0)u_x(0, t) = -H[u(0, t) - u_B(t)]$
$x = L$	$u(L, t) = u_B(t)$	$-K_0(L)u_x(L, t) = \phi(t)$	$-K_0(L)u_x(L, t) = H[u(L, t) - u_B(t)]$

Es importante observar el cambio de signo (H se transforma en $-H$ cuando consideramos $x = 0$) en la ley de enfriamiento de Newton. ¿Por qué?

5.5. La ecuación de Laplace y la ecuación de Poisson

Cuando la conductividad térmica del material y la fuente f son independientes del tiempo en la ecuación general de conducción del calor

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \overline{\nabla} \cdot K\overline{\nabla} u + f,$$

y nos proponemos encontrar soluciones estacionarias (independientes del tiempo) de esa ecuación, al hacer $u_t = 0$ tenemos la ecuación de Poisson

$$\begin{aligned} \overline{\nabla} \cdot K\overline{\nabla} u &= -f \\ \overline{\nabla}^2 u &= -\tilde{f} \qquad \text{si } K \text{ es constante.} \end{aligned}$$

Cuando la fuente es nula tenemos la ecuación de Laplace

$$\begin{aligned} \overline{\nabla} \cdot K\overline{\nabla} u &= 0 \\ \overline{\nabla}^2 u &= 0 \qquad \text{si } K \text{ es constante.} \end{aligned}$$

5.6. Otras relaciones constitutivas

La forma general de una ley de conservación de una cantidad $u = u(\overline{x}; t)$ es una relación diferencial entre u, el flujo $\overline{\phi}$ de la cantidad u y las fuentes f que miden la generación o desaparición de la cantidad u en el dominio. Precisamente

$$u_t + \overline{\nabla} \cdot \overline{\phi} = f.$$

En muchos casos la fuente f es función del punto del espacio, del instante t y también de u misma: $f = f(\overline{x}, t, u)$.

Las relaciones constitutivas son las relaciones entre el flujo $\overline{\phi}$ y la cantidad u. En el caso de la conducción del calor, la relación constitutiva es la Ley de Fourier $\overline{\phi} = -K\overline{\nabla}u$. Otros modelos físicos (en sentido amplio) que tienen la misma ley de conservación están dados por otras relaciones constitutivas. En dimensión espacial igual a uno, la ley de conservación toma la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial x} = f$$

o

$$u_t + \overline{\phi}_x = f.$$

El carácter vectorial de $\overline{\phi}$ queda determinado por su signo, entendiendo que cuando ϕ es positivo el flujo es en el sentido creciente de la variable x (hacia la derecha) y cuando es negativo, el flujo ocurre en el sentido opuesto. Así, la ecuación que da la ley de conservación tiene la forma sencilla

$$u_t + \phi_x = f,$$

$u = u(x, t)$; $\phi = \phi(x, t)$; $f = f(x, t, u)$.

Transporte, advección: Relación constitutiva "*el flujo es proporcional a la cantidad que fluye*"

$$\phi = cu.$$

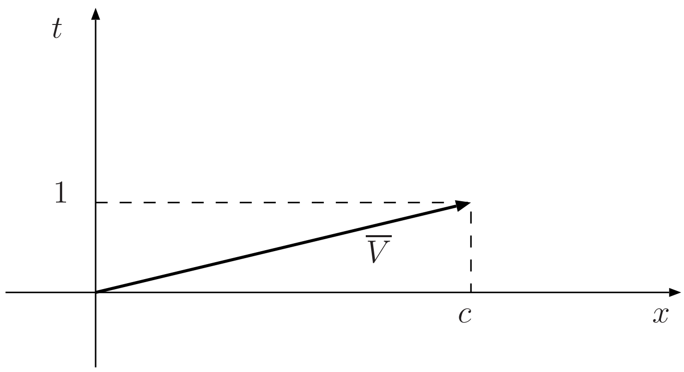
El flujo ϕ no depende explícitamente de t ni de x, sólo a través de u. La incógnita u satisface la ecuación diferencial en derivadas parciales de primer orden

$$u_t + cu_x = f.$$

Cuando $f = 0$ se tiene la ecuación de advección:

$$u_t + cu_x = 0; \qquad u = u(x, t).$$

Esta ecuación es sencilla porque es esencialmente una ecuación ordinaria elemental. En efecto pensemos el lado izquierdo como el producto escalar del vector $(c, 1)$ con el gradiente espacio-temporal (u_x, u_t) de u. La ecuación de advección dice entonces que la derivada direccional de u en la dirección $(c, 1)$ es nula. Esto significa que u es constante en la dirección del vector $(c, 1)$.



En otras palabras, la ecuación de advección dice que u es constante en líneas paralelas a $\overline{V} = (c, 1)$. Notar que un vector perpendicular a $(c, 1)$ es $(1, -c)$, y por consiguiente u sólo puede depender de la *variable perpendicular a* $cx + t$, es decir

$$u(x, t) = F(x - ct)$$

para alguna función F de una variable, de clase C^1 (derivable con derivada continua). En efecto, por la regla de la cadena

$$u_t = F'(x - ct)(-c), \qquad u_x = F'(x - ct)1,$$

y por lo tanto

$$u_t + cu_x = 0.$$

Notemos de paso que si $u(x, 0) = F(x)$ es la condición inicial, entonces necesariamente tendremos que la única solución del problema

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x, 0) = F(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

está dada por $u(x, t) = F(x - ct)$. Por ejemplo, is $F(x) = e^{-x^2}$, la solución es una Gaussiana que se traslada a velocidad c:

$$u(x, t) = e^{-(x-ct)^2}.$$

Se tiene *advección con decaimiento* cuando el término fuente $f = -\lambda u$ con $\lambda > 0$.

Advección no lineal: Cuando la relación constitutiva $\phi = \varphi(u)$ está dada por una función no lineal φ de la variable u. La ecuación diferencial de primer orden toma ahora la forma

$$u_t + \varphi'(u)u_x = f.$$

5.7. La ecuación de ondas

Más adelante haremos una deducción de la ecuación de ondas desde el punto de vista de vibraciones de una cuerda. Elegimos ahora el punto de vista de las ondas electromagnéticas porque esto nos lleva a introducir el sistema de las Ecuaciones de Maxwell.

La profunda relación entre campos eléctricos y magnéticos, cuya investigación se inicia con los experimentos de Faraday, "moviendo imanes" y "haciendo girar corrientes eléctricas" está expresada en el sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de primer orden llamado *Las Ecuaciones de Maxwell.* Denotemos por $\overline{B} = \overline{B}(\overline{x}; t)$ el campo magnético en el punto $\overline{x}$ y en el instante t. Denotemos con $\overline{E} = \overline{E}(\overline{x}; t)$ el campo eléctrico. Ambos campos son solenoidales ($\overline{\nabla} \cdot \overline{B} = \overline{\nabla} \cdot \overline{E} = 0$) y las variaciones temporales de cada uno de ellos se traducen en variaciones espaciales del otro. Muchísimo más precisamente, el sistema de Ecuaciones de Maxwell se escribe:

$$M : \begin{cases} \overline{\nabla} \cdot \overline{B} = 0 & \text{(M.1) Ley de Gauss para el campo magnético} \\ \overline{\nabla} \cdot \overline{E} = 0 & \text{(M.2) Ley de Gauss} \\ \overline{\nabla} \times \overline{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \overline{E}}{\partial t} & \text{(M.3) Ley de Ampère} \\ \overline{\nabla} \times \overline{E} = -\dfrac{\partial \overline{B}}{\partial t} & \text{(M.4) Ley de Faraday} \end{cases}$$

donde ε_0 es la *permisividad* del espacio (constante eléctrica) y μ_0 es la *permeabilidad* del espacio (constante magnética). A partir de este sistema obtendremos la ecuación de ondas electromagnéticas. Para ello necesitaremos una fórmula que es muy útil y relaciona tres operadores de segundo orden obtenidos por iteración del operador *nabla*: $\overline{\nabla}$.

Si $\overline{V}$ es un campo vectorial de clase C^2 en el espacio, el *Laplaciano vectorial* de $\overline{V}$ es el campo vectorial cuyas componentes son los Laplacianos de cada una de las componentes de $\overline{V}$:

$$\text{Si} \quad \overline{V} = V_1 \, \overline{i} + V_2 \, \overline{j} + V_3 \, \overline{k}, \qquad \text{entonces} \quad \overline{\nabla}^2 \overline{V} = \overline{\nabla}^2 V_1 \, \overline{i} + \overline{\nabla}^2 V_2 \, \overline{j} + \overline{\nabla}^2 V_3 \, \overline{k}.$$

Por otra parte, puesto que la divergencia de $\overline{V}$ es un campo escalar, podemos calcular su gradiente para obtener $\overline{\nabla}(\overline{\nabla} \cdot \overline{V})$. También está bien definido el rotor del rotor de $\overline{V}$: $\overline{\nabla} \times (\overline{\nabla} \times \overline{V})$. La fórmula que nos interesa es una relación entre estos tres operadores vectoriales, que resumimos en el siguiente

Lema 5.4. *Si $\overline{V}$ es un campo vectorial C^2 en el espacio, entonces*

$$\overline{\nabla}^2 \overline{V} = \overline{\nabla}(\overline{\nabla} \cdot \overline{V}) - \overline{\nabla} \times (\overline{\nabla} \times \overline{V}).$$

O sea, el Laplaciano vectorial es el gradiente de la divergencia menos el rotor del rotor.

Demostración. Supongamos primero que $\overline{V} = V_1 \, \overline{i}$, entonces $\overline{\nabla}^2 \overline{V} = \overline{\nabla}^2 V_1 \, \overline{i}$, y por otro