Calificación: **Apellido, Nombre:**

Primer Examen Parcial
19/05/2010

Ecuaciones en Derivadas Parciales

---

(1) **________/40 pts**

Recordemos que en coordenadas cilíndricas

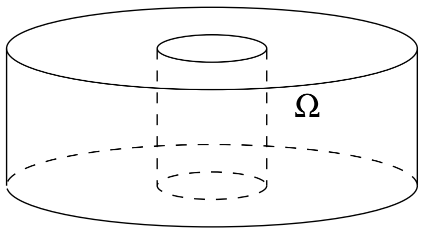
$$q_1 = \rho \qquad q_2 = \theta \qquad q_3 = z$$
$$h_1 = 1 \qquad h_2 = \rho \qquad h_3 = 1$$
$$\overline{\nabla} u = \frac{\partial u}{\partial \rho}\,\overline{a}_1 + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}\,\overline{a}_2 + \frac{\partial u}{\partial z}\,\overline{a}_3$$
$$\overline{\nabla}^2 u = \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right\}.$$

(a) Hallar la solución que depende sólo de la variable ρ de la ecuación de Laplace

$$\overline{\nabla}^2 u = 0, \qquad \text{en} \quad \Omega: \quad 20 \leq \rho \leq 100, \quad 0 \leq z \leq 70.$$

y que cumple las condiciones de borde

$$u = 60 \qquad \text{en } \rho = 20$$
$$u = 0 \qquad \text{en } \rho = 100$$



(Puede dejar las constantes C_1 y C_2 sin calcular, pero debe decir cómo se calcularían.)

(b) ¿Cuánto vale $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ en las caras superior ($z = 70$) e inferior ($z = 0$) del dominio?

(c) Interpretar físicamente las condiciones de borde que cumple la temperatura u en el borde de la región

$$\Omega: \quad 20 \leq \rho \leq 100, \quad 0 \leq z \leq 70 \qquad \text{(ver la figura).}$$

(d) Calcular el flujo de calor saliente de Ω a través de la cara superior ($z = 70$) e inferior ($z = 0$) (suponer todas las constantes iguales a 1).

(e) Calcular el flujo de calor saliente de Ω a través de la cara lateral curva $\rho = 100$. (suponer todas las constantes iguales a 1).

(f) Sin calcular. ¿Puede decir cuál es el flujo saliente de Ω a través de la cara lateral curva $\rho = 20$? Justificar. (Pensar en el teorema de la divergencia)

(2) ________/25 pts

Consideremos la ecuación diferencial siguiente:

$$5u_x + 3u_y + 6u = 0, \qquad u = u(x,y). \tag{1}$$

(a) Hallar la solución general de (1), y decir cuáles son las curvas características.

En cada uno de los siguientes casos hallar (si es posible) una solución de la ecuación (1) que cumpla la condición lateral indicada. Si no hay, indicar por qué. Si hay más de una, indicar tres soluciones diferentes.

(b) $u(x,x) = \operatorname{sen}(x)e^{-2x}$, **(c)** $u(\frac{x}{3}, \frac{x}{5} + 1) = 1.$

---

(3) ________/25 pts

Hallar las soluciones de variables separadas de

$$\begin{aligned} &u_t = k u_{xx}, \qquad 0 \le x \le L, \quad t \ge 0, \\ &u_x(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \qquad t \ge 0, \end{aligned}$$

---

(4) ________/15 pts

Dar un ejemplo de ecuación lineal de primer orden con coeficientes constantes (en $\mathbb{R}^2$), y condición lateral dada sobre una curva lateral que corte todas las características, pero que no tenga solución. Explicar por qué no tiene solución.