Calificación: **Apellido, Nombre:**

Primer Examen Parcial
18/05/2011

Ecuaciones en Derivadas Parciales

---

(1) ________/30 pts

Recordemos que en coordenadas esféricas

$$
\begin{aligned}
q_1 &= r \qquad q_2 = \theta \qquad q_3 = \varphi \\
h_1 &= 1 \qquad h_2 = r \operatorname{sen}\varphi \qquad h_3 = r \\
\overline{\nabla} u &= \frac{\partial u}{\partial r}\,\overline{a}_1 + \frac{1}{r\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial u}{\partial \theta}\,\overline{a}_2 + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\,\overline{a}_3 \\
\overline{\nabla}^2 u &= \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\varphi}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\operatorname{sen}\varphi\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\operatorname{sen}\varphi\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

(a) Hallar la solución de la ecuación de Laplace

$$\overline{\nabla}^2 u = 0, \qquad \text{en} \quad \Omega: \quad 50 < r < 100, \quad \varphi > \pi/2.$$

que cumple las condiciones de borde

$$
\begin{aligned}
u &= 60 \qquad \text{en } r = 50 \\
u &= 0 \qquad \text{en } r = 100 \\
\frac{\partial u}{\partial \varphi} &= 0 \qquad \text{en } \varphi = \pi/2
\end{aligned}
$$

(Ayuda: tal solución depende sólo de la variable r.)

(b) Interpretar físicamente las condiciones de borde que cumple la temperatura u en cada cara del borde de la región

$$\Omega: \quad 50 < r < 100, \quad \varphi > \pi/2.$$

Graficar la región Ω.

Para los ítems que siguen utilizar suponer todas las constantes físicas iguales a uno.

(c) Calcular el flujo de calor saliente de Ω a través de la cara plana superior ($\varphi = \pi/2$).

(d) Calcular el flujo de calor *saliente* de Ω a través de la cara curva inferior $r = 100$.

(e) Sin calcular. ¿Puede decir cuál es el flujo *entrante* a Ω a través de la cara curva superior $r = 50$? Justificar.

(2) ________/25 pts

Consideremos la ecuación diferencial siguiente:

$$3u_x + 5u_y = 16x, \qquad u = u(x,y). \tag{1}$$

(a) Hallar la solución general de (1), y decir cuáles son las curvas características.

(b) ¿Qué forma tiene que tener $g(t)$ para que exista una solución de (1) que cumpla la siguiente condición lateral?

$$u(\frac{t}{5} - 1, \frac{t}{3}) = g(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si $g(t)$ cumple esa condición. ¿Hay solución única?

---

(3) ________/25 pts

Hallar las soluciones de variables separadas de

$$\begin{aligned} &u_t = ku_{xx}, \qquad 0 < x < L, \quad t > 0, \\ &u(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) = 0, \qquad t > 0. \end{aligned}$$

---

(4) ________/25 pts

Considerar la función

$$\rho(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

(a) Graficarla y decir cuánto vale $\int_{\mathbb{R}} \rho(x)\,dx$ (se puede deducir a partir del gráfico).

(b) Definamos, para $t > 0$

$$\rho^t(x) = \frac{1}{t}\rho(\frac{x}{t}),$$

graficar ρ^t para $t = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{10}$.

(c) Demostrar que si f es integrable sobre intervalos acotados y continua en $x = x_0$ entonces

$$\lim_{t \to 0^+} \int_{\mathbb{R}} \rho^t(x - x_0) f(x)\,dx = f(x_0).$$