Apellido, Nombre: ______________________________

Calificación:

Primer Examen Parcial
16/05/2012

Ecuaciones en Derivadas Parciales

---

(1) ________/15 pts

Recordemos que el laplaciano en coordenadas esféricas está dado por

$$\overline{\nabla}^2 u = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\varphi}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \operatorname{sen}\varphi \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\operatorname{sen}\varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)\right\}.$$

Hallar el valor de la constante C para que la función dada en coordenadas esféricas por

$$u(r,\theta,\varphi;t) = \frac{1}{t^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{C\,t}}$$

sea solución de la ecuación de difusión $u_t = 3\,\overline{\nabla}^2 u$ en $\mathbb{R}^3$ para $t > 0$.

---

(2) ________/35 pts

Supongamos que u es solución C^2 de la siguiente ecuación del calor para $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$

$$u_t - \overline{\nabla}^2 u = 0, \qquad u = u(x,y,z;t)$$

(a) Demostrar que para toda región acotada R con frontera suave S

$$\frac{d}{dt}\iiint_R u \; d\text{vol} = \iiint_R u_t \; d\text{vol}, \qquad \text{para todo } t > 0.$$

(b) Demostrar que para toda región acotada R con frontera suave S y vector normal exterior $\overline{n}$

$$\frac{d}{dt}\iiint_R u \; d\text{vol} = \iint_S \overline{\nabla} u \cdot \overline{n} \; d\sigma, \qquad \text{para todo } t > 0.$$

(c) Demostrar que si en un cierto punto $\overline{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ y cierto instante $t_0 > 0$, se cumple que $u_t(\overline{x}_0; t_0) > 0$, entonces existe una bola B centrada en $\overline{x}_0$ y de radio pequeño $r > 0$ tal que (en ese instante $t = t_0$)

$$\iint_{\partial B} \overline{\nabla} u \cdot \overline{n} \; d\sigma > 0.$$

(d) Interpretar físicamente el ítem **(c)** (suponiendo que $K_0 = c = \rho = 1$).

(3) ________/30 pts

Consideremos la ecuación diferencial siguiente:

$$\text{(ED)} \qquad u_x + 3u_y = x + y, \qquad u = u(x, y).$$

(a) Hallar la solución general de (ED), y decir cuáles son las curvas características. Verificar.

En cada uno de los siguientes casos hallar (si es posible) una solución de la ecuación (ED) que cumpla la condición lateral indicada. Si no hay, indicar por qué. Si hay más de una, indicar tres soluciones diferentes.

(b) $u(x, 3x - 4) = 2(x - 1)^2 + 1,$ **(c)** $u(3x, 1) = \dfrac{(x+1)^2}{8} + e^{-x^2}.$

---

(4) ________/20 pts

Hallar la solución del siguiente problema en el primer cuadrante de $\mathbb{R}^2$ ($x > 0$, $y > 0$), graficar las curvas características:

$$2xu_x + yu_y = 0, \qquad u(x, 1/x) = x^6, \qquad u = u(x, y).$$