Apellido, Nombre: ______________________________

Calificación:

Primer Examen Parcial
26/05/2014

Ecuaciones en Derivadas Parciales

---

(1) ______/25 pts

Recordemos que en coordenadas cilíndricas

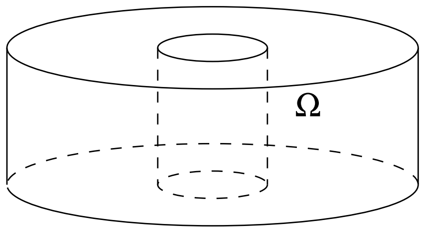
$$\begin{array}{lll} q_1 = \rho & q_2 = \theta & q_3 = z \\ h_1 = 1 & h_2 = \rho & h_3 = 1 \end{array}$$

$$\overline{\nabla} u = \frac{\partial u}{\partial \rho}\,\overline{a}_1 + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}\,\overline{a}_2 + \frac{\partial u}{\partial z}\,\overline{a}_3$$

$$\overline{\nabla}^2 u = \frac{1}{\rho}\left\{ \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial z}\right) \right\}.$$

(a) Hallar la solución que depende sólo de la variable ρ de la ecuación de Laplace

$$\overline{\nabla}^2 u = 0, \qquad \text{en} \quad \Omega: \quad 20 \le \rho \le 100, \quad 0 \le z \le 70.$$



y que cumple las condiciones de borde

$$\begin{array}{ll} u = 0 & \text{en } \rho = 20 \\ u = 50 & \text{en } \rho = 100 \end{array}$$

(Puede dejar las constantes C_1 y C_2 sin calcular, pero debe decir cómo se calcularían.)

(b) ¿Cuánto vale $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ en las caras superior ($z = 70$) e inferior ($z = 0$) del dominio? Calcular el flujo de calor saliente de Ω a través de la cara superior ($z = 70$) e inferior ($z = 0$) (suponer todas las constantes iguales a 1).

(c) Calcular el flujo de calor saliente de Ω a través de la cara lateral curva $\rho = 100$. (suponer todas las constantes iguales a 1).

(d) Sin calcular. ¿Puede decir cuál es el flujo saliente de Ω a través de la cara lateral curva $\rho = 20$? Justificar. (Pensar en el teorema de la divergencia)

---

(2) ______/15 pts

Consideremos la ecuación diferencial siguiente:

$$\text{(ED)} \qquad u_x + 3u_y = x - y, \qquad u = u(x,y).$$

Hallar la solución general de (ED), y decir cuáles son las curvas características. Verificar.

(3) ________/25 pts

(a) Supongamos que $v(x,t)$ es una función C^2 que satisface

$$\begin{array}{ll} \text{(ED)} & v_t = v_{xx} \quad 0 \le x \le 1, \quad t > 0; \\ \text{(CB1)} & v_x(0,t) = Hv(0,t), \quad t > 0; \\ \text{(CB2)} & v(1,t) = 0, \quad t > 0. \end{array}$$

Aquí H es una constante positiva (arbitraria).

Demostrar que:

$$\text{Si} \quad 0 \le t_1 \le t_2 \qquad \text{entonces} \qquad \int_0^1 [v(x,t_2)]^2\,dx \le \int_0^1 [v(x,t_1)]^2\,dx. \tag{1}$$

(b) Mostrar que si $H = \dfrac{\cosh 1}{\operatorname{senh} 1}$, entonces

$$v(x,t) = \operatorname{senh}(1-x)\,e^t$$

es solución de

$$\begin{array}{ll} \text{(ED)} & v_t = v_{xx} \quad 0 \le x \le 1, \quad t > 0; \\ \text{(CB1')} & v_x(0,t) = -Hv(0,t), \quad t > 0; \\ \text{(CB2)} & v(1,t) = 0, \quad t > 0. \end{array}$$

Demostrar que

$$\int_0^1 [v(x,t)]^2\,dx \to +\infty \qquad \text{cuando} \quad t \to +\infty.$$

Por lo tanto esta función v no cumple (1).

(c) ¿Qué condición de borde, (CB1) o (CB1') corresponde a la ley de enfriamiento de Newton en el extremo izquierdo del intervalo? Explicar.

---

(4) ________/15 pts

Hallar la solución de

$$\begin{array}{l} u_t = 3u_{xx}, \qquad 0 \le x \le 1, \quad t \ge 0, \\ u_x(0,t) = -1, \quad u_x(1,t) = 3, \qquad t \ge 0, \\ u(x,0) = 142 + 10\cos(2\pi x) - x + 2x^2, \qquad 0 \le x \le 1. \end{array}$$

---

(5) ________/20 pts

Enunciar y demostrar un Principio de Duhamel para el siguiente problema:

$$\begin{array}{l} u_t - ku_{xx} = h(x,t), \qquad 0 \le x \le L, \quad t \ge 0, \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0, \qquad t \ge 0, \\ u(x,0) = 0, \qquad 0 \le x \le L. \end{array}$$