Apellido, Nombre: ______________________________

Calificación:

Primer Examen Parcial
26/05/2014

Matemática Aplicada

---

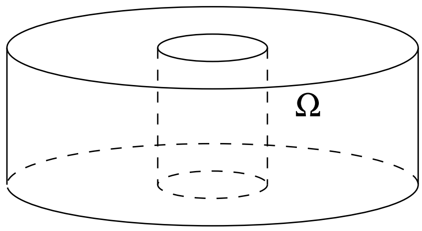
(1) ______/25 pts

Recordemos que en coordenadas cilíndricas

$$
\begin{aligned}
&q_1 = \rho \qquad q_2 = \theta \qquad q_3 = z\\
&h_1 = 1 \qquad h_2 = \rho \qquad h_3 = 1\\
&\overline{\nabla} u = \frac{\partial u}{\partial \rho}\,\overline{a}_1 + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}\,\overline{a}_2 + \frac{\partial u}{\partial z}\,\overline{a}_3\\
&\overline{\nabla}^2 u = \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

(a) Hallar la solución que depende sólo de la variable ρ de la ecuación de Laplace

$$\overline{\nabla}^2 u = 0, \qquad \text{en} \quad \Omega: \quad 20 \le \rho \le 100, \quad 0 \le z \le 70.$$



y que cumple las condiciones de borde

$$
\begin{aligned}
u &= 0 \qquad \text{en } \rho = 20\\
u &= 50 \qquad \text{en } \rho = 100
\end{aligned}
$$

(Puede dejar las constantes C_1 y C_2 sin calcular, pero debe decir cómo se calcularían.)

(b) ¿Cuánto vale $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ en las caras superior ($z = 70$) e inferior ($z = 0$) del dominio?

(c) Interpretar físicamente las condiciones de borde que cumple la temperatura u en el borde de la región

$$\Omega: \quad 20 \le \rho \le 100, \quad 0 \le z \le 70 \qquad \text{(ver la figura).}$$

(d) Calcular el flujo de calor saliente de Ω a través de la cara superior ($z = 70$) e inferior ($z = 0$) (suponer todas las constantes iguales a 1).

(e) Calcular el flujo de calor saliente de Ω a través de la cara lateral curva $\rho = 100$. (suponer todas las constantes iguales a 1).

(f) Sin calcular. ¿Puede decir cuál es el flujo saliente de Ω a través de la cara lateral curva $\rho = 20$? Justificar. (Pensar en el teorema de la divergencia)

(2) **________/25 pts**

Consideremos la ecuación diferencial siguiente:

$$\text{(ED)} \qquad u_x + 3u_y = x - y, \qquad u = u(x, y).$$

(a) Hallar la solución general de (ED), y decir cuáles son las curvas características. Verificar.

En cada uno de los siguientes casos hallar (si es posible) una solución de la ecuación (ED) que cumpla la condición lateral indicada. Si no hay, indicar por qué. Si hay más de una, indicar tres soluciones diferentes.

(b) $u(x, -x) = \operatorname{sen} x$, **(c)** $u(\frac{x}{3}, x) = e^x$.

---

(3) **________/30 pts**

(a) Supongamos que $v(x,t)$ es una función C^2 que satisface

$$\begin{aligned} &\text{(ED)} && v_t = v_{xx} \quad 0 \le x \le 1, \quad t > 0; \\ &\text{(CB1)} && v_x(0,t) = Hv(0,t), \quad t > 0; \\ &\text{(CB2)} && v(1,t) = 0, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Aquí H es una constante positiva (arbitraria).

Demostrar que:

$$\text{Si} \quad 0 \le t_1 \le t_2 \qquad \text{entonces} \qquad \int_0^1 [v(x,t_2)]^2\,dx \le \int_0^1 [v(x,t_1)]^2\,dx. \tag{1}$$

(b) Mostrar que si $H = \dfrac{\cosh 1}{\operatorname{senh} 1}$, entonces

$$v(x,t) = \operatorname{senh}(1-x)\,e^t$$

es solución de

$$\begin{aligned} &\text{(ED)} && v_t = v_{xx} \quad 0 \le x \le 1, \quad t > 0; \\ &\text{(CB1')} && v_x(0,t) = -Hv(0,t), \quad t > 0; \\ &\text{(CB2)} && v(1,t) = 0, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Demostrar que

$$\int_0^1 [v(x,t)]^2\,dx \to +\infty \qquad \text{cuando} \quad t \to +\infty.$$

Por lo tanto esta función v no cumple (1).

(c) ¿Qué condición de borde, (CB1) o (CB1') corresponde a la ley de enfriamiento de Newton en el extremo izquierdo del intervalo? Explicar.

---

(4) **________/20 pts**

Hallar la solución de

$$\begin{aligned} &u_t = 3u_{xx}, && 0 \le x \le 1, \quad t \ge 0, \\ &u_x(0,t) = -1, \quad u_x(1,t) = 3, && t \ge 0, \\ &u(x,0) = 142 + 10\cos(2\pi x) - x + 2x^2, && 0 \le x \le 1. \end{aligned}$$
