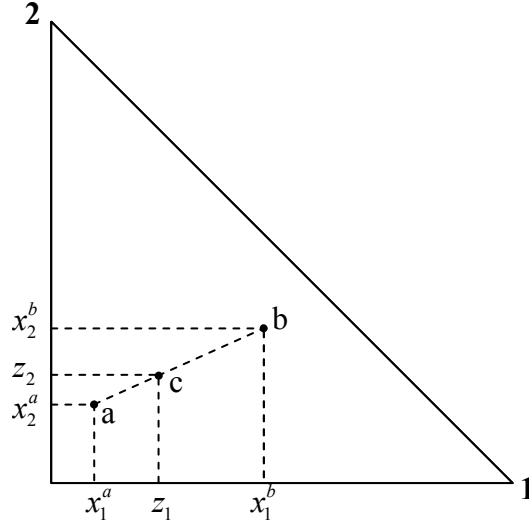


Análisis de Sistemas Ternarios (Chialvo)

Considérese el siguiente sistema ternario:



Donde:

(a) y (b) son las soluciones iniciales, y (c) la solución resultante de la mezcla de ambas.

Realizando un balance másico de cada componente tendremos

$$n^a x_1^a + n^b x_1^b = n^0 z_1 \quad (1)$$

$$n^a x_2^a + n^b x_2^b = n^0 z_2 \quad (2)$$

$$n^a x_3^a + n^b x_3^b = n^0 z_3 \quad (3)$$

Expresiones que pueden ser reescritas, si se tiene en cuenta que:

$$n^a + n^b = n^0 \quad (4)$$

Con (4) en (1-3) resulta,

$$(z_1 - x_1^a) n^a = (x_1^b - z_1) n^b \quad (5)$$

$$(z_2 - x_2^a) n^a = (x_2^b - z_2) n^b \quad (6)$$

De donde se concluye que:

$$x_1^a \leq z_1 \leq x_1^b \quad (7)$$

$$x_2^a \leq z_2 \leq x_2^b \quad (8)$$

Por otra parte haciendo el cociente

$$\frac{z_1 - x_1^a}{z_2 - x_2^a} = \frac{x_1^b - z_1}{x_2^b - z_2} \quad (9)$$

y operando

$$\begin{aligned}
z_1 x_2^b - \cancel{z_1 z_2} - x_1^a x_2^b + x_1^a z_2 &= z_2 x_1^b - \cancel{z_2 z_1} - x_1^b x_2^a + x_2^a z_1 \\
z_1 (x_2^b - x_2^a) - x_1^a x_2^b &= z_2 (x_1^b - x_1^a) - x_1^b x_2^a
\end{aligned} \tag{10}$$

resulta

$$z_2 = \frac{x_1^b x_2^a - x_1^a x_2^b}{(x_1^b - x_1^a)} + \frac{(x_2^b - x_2^a)}{(x_1^b - x_1^a)} z_1 \tag{11}$$

Para chequear la validez de (11) evaluamos, por ejemplo, $z_2(x_1^a) = x_2^a$

$$z_2 = \frac{x_1^b x_2^a - \cancel{x_1^a x_2^b} + \cancel{x_2^b x_1^a} - x_2^a x_1^a}{(x_1^b - x_1^a)} \tag{12}$$

$$\boxed{z_2 = \frac{x_1^b x_2^a - x_2^a x_1^a}{(x_1^b - x_1^a)} = \frac{(x_1^b - x_1^a)}{(x_1^b - x_1^a)} x_2^a = x_2^a} \tag{13}$$

Quedando claro entonces que la recta que une los puntos (a) y (b) está descripta por la ec. (11).

Regla de la Palanca

Reescribiendo (5)

$$(z_1 - x_1^a)(n^0 - n^b) = (x_1^b - z_1)n^b \tag{14}$$

y operando,

$$(z_1 - x_1^a)n^0 - (z_1 - x_1^a)n^b = (x_1^b - z_1)n^b \tag{15}$$

$$(z_1 - x_1^a)n^0 = (x_1^b - x_1^a)n^b \tag{16}$$

De trigonometría elemental resulta:

$$\frac{\overline{ab}}{(x_1^b - x_1^a)} = \frac{\overline{ac}}{(z_1 - x_1^a)} = \frac{\overline{cb}}{(x_1^b - z_1)} \tag{17}$$

Por lo que (16) puede reescribirse como,

$$\frac{\overline{ab}}{n^0} = \frac{\overline{ac}}{n^b} \tag{18}$$

y recordando que:

$$\frac{\overline{ab}}{n^0} = \frac{\overline{ac} + \overline{cb}}{n^a + n^b} = \frac{\overline{ac}}{n^b} = \frac{\overline{cb}}{n^a} \tag{19}$$

Se completa la regla de la palanca

$$\boxed{\frac{\overline{ab}}{n^0} = \frac{\overline{ac}}{n^b} = \frac{\overline{cb}}{n^a}} \tag{20}$$