Curso de Articulación en Matemática – Ingreso UNL
Edición 2027

Metodología de trabajo

A través del material de estudio revisaremos algunos temas que desarrollaste en tu trayecto por el colegio secundario. Es fundamental que recorras por completo el material, y lo leas las veces que resulte necesario.

Dispondrás de una guía de ejercicios para que realices antes de cada encuentro presencial, y videos que desarrollan los contenidos teóricos de este curso para que puedas ver antes de cada encuentro.

En cada uno de los encuentros podrás despejar todas tus dudas respecto de las actividades que realizaste, con la ayuda de un/a tutor/a que coordinará el trabajo de la comisión. Es muy importante que lleves resueltas las actividades propuestas para cada encuentro y que veas los videos tantas veces como sea necesario. Esto hará que el tiempo del encuentro sea más provechoso, a la vez que te permitirá interactuar con tu tutor/a y compañeros/as.

En el Aula Virtual podrás encontrar otro tipo de actividades para trabajar fuera de los encuentros, como *autoevaluaciones semanales* y *foros de consulta*.

Tené en cuenta que el principal objetivo de este trayecto es brindarte las herramientas para conseguir un nivel de conocimiento que te permita comprender los contenidos de las primeras asignaturas y abordarlos de la mejor manera posible.

Cursado y Aprobación

El cursado será presencial, con un total de 8 encuentros de dos horas cada uno. Los mismos se distribuirán en encuentros semanales, entre el **1 de febrero y el 26 de febrero de 2027**. Los horarios y días se definirán según la comisión que te sea asignada.

El curso se aprueba mediante un test diagnóstico, el cual se evaluará al finalizar el cursado, y permitirá conocer tu grado de avance con respecto a los contenidos abordados. Si obtenés al menos un 60 % del puntaje asignado al test, el mismo se considerará aprobado. **MUY IMPORTANTE: el único requisito para poder acceder a dicho test** es tener al menos un 75 % de asistencia a los encuentros presenciales. Esto quiere decir que deberás asistir, como mínimo, a 6 de los 8 encuentros propuestos. **No se contempla la condición de alumno en calidad de libre que se presenta a rendir sin haber participado de los encuentros presenciales y sin haber alcanzado la asistencia mínima.**

¿Qué ocurre si no accedo al test o no lo apruebo? Si no cumplís con los requisitos anteriores, no estarás habilitado/a a cursar la asignatura que es correlativa al CAM según el Plan de Estudios de tu carrera. Es decir, no podrás cursar *Álgebra Lineal* (si tu carrera es AI, IA, II, IM, IQ, LQ, PUQ, QAU), *Cálculo I* (si tu carrera es II), y *Matemática Básica* (si tu carrera es LCD, LF o LMA).

De todas formas, si no aprobás en la primera instancia, no te preocupes, porque la UNL cuenta con otra edición del ingreso donde tendrás la posibilidad de revisar y rendir los contenidos del CAM.

Una vez más te recordamos que el material seleccionado para este curso está pensado para acercarte al ambiente universitario. Esperamos que te sirva de guía y te inicie en el trabajo autónomo.

Curso de Articulación en Matemática – Ingreso UNL
Edición 2027

Ejercicios seleccionados

Capítulo 1: Conjuntos

Sección 1.1 (pág. 4): 1, 2, 3.

Sección 1.2 (pág. 8): 1, 2.

Capítulo 2: Conjuntos numéricos

Sección 2.1 (pág. 13): 2, 3.

Sección 2.2 (pág. 17): 6, 7.

Sección 2.3.1 (pág. 38): 1(d), 1(e), 1(i), 2(d), 2(e), 4(a), 4(d), 5(b), 5(c), 5(g), 5(k), 5(l), 5(m), 7, 8.

Sección 2.3.3 (pág. 45): 1(a), 1(b), 1(c), 1(d), 2, 4.

Sección 2.3.4 (pág. 51): 1, 8, 12.

Capítulo 3: Polinomios y expresiones algebraicas

Sección 3.1 (pág. 57): 1(b), 1(c), 2(a), 3(a), 3(b), 3(c), 4, 5.

Sección 3.2.1 (pág. 61): 1(c), 1(e), 2, 3.

Sección 3.2.2 (pág. 65): 4(a), 4(b), 4(d), 5(b), 5(d), 5(e), 5(i), 5(k).

Sección 3.2.3 (pág. 71): 1(a), 1(b), 5(a), 5(b), 5(d).

Sección 3.3 (pág. 85): 1(a), 1(c), 2(b), 2(d), 4, 5, 7, 11, 13, 14, 14, 17, 20.

Sección 3.4 (pág. 94): 2, 4.

Capítulo 4: Ecuaciones e inecuaciones

Sección 4.1 (pág. 97): 1, 3, 5.

Sección 4.2 (pág. 112): 2, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 16, 18, 19, 21, 25(b), 25(d), 27, 30, 31.

Sección 4.3 (pág. 123): 1(c), 1(e), 5(a), 5(c), 6(b), 6(c), 6(d), 6(f), 6(h), 7(a), 7(c), 8, 9(b), 10, 11, 13, 15.

Sección 4.4 (pág. 130): 2(a), 2(b), 3(a), 3(b), 5, 6, 11, 14, 15.

Sección 4.5 (pág. 146): 3, 4, 6, 7.

Capítulo 5: Funciones

Sección 5.1 (pág. 166): 1, 2, 4, 5, 6, 8, 11, 12, 13.

Sección 5.2 (pág. 196): 1(a), 1(b), 1(e), 2, 3, 4, 5(a), 5(d), 6(a), 6(b), 6(c), 9, 10(a), 10(e), 11, 12, 14, 16, 19, 31, 32, 37, 38.

Sección 5.3 (pág. 206): 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Sección 5.5 (pág. 240): 1, 9, 12, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 28, 29.

Capítulo 6: Resolución de triángulos rectángulos

Sección 6.1 (pág. 300): 1, 3, 4, 5, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19.

Sección 6.2 (pág. 312): 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Curso de Articulación en Matemática – Ingreso UNL
Edición 2027

INDICACIONES SOBRE EL MATERIAL DE ESTUDIO

A través de este material de estudio revisaremos algunos temas que desarrollaste en tu recorrido por el colegio secundario.

El material fue elaborado con fragmentos del libro *Manual de Matemática Preuniversitaria: edición ampliada y corregida*, M. Carena, Ediciones UNL, 2da. Ed., 2021. El mismo puede descargarse gratuitamente desde el sitio web de la misma editorial. Aquí recopilamos los contenidos mínimos de Matemática necesarios para comprender los temas de las primeras asignaturas de la carrera que hayas elegido. Ya que éstos forman una base sobre la que se construirá el nuevo conocimiento, es fundamental que aproveches este trayecto para afianzarlos.

Podrás observar en el material distintas "marcas de agua" con las siguientes leyendas: "OPCIONAL" o "NO CORRESPONDE". El contenido que se encuentra bajo la leyenda "OPCIONAL" puede ser útil como herramienta para otros contenidos que serán parte de la evaluación. Por ejemplo, los conceptos desarrollados en el Capítulo 1 acerca de la noción de conjuntos pueden resultarte útiles para comprender luego la notación de intervalo. Aquellas partes del texto donde encuentres la leyenda "NO CORRESPONDE" se refieren a temas importantes para un manejo fluido de algunos conceptos, pero que escapan a los objetivos de este curso. Sin embargo, si la curiosidad te lo indica, puedes explorarlos sin ningún inconveniente.

A lo largo de todos los capítulos del libro encontrarás el símbolo . Cada vez que lo veas significa que esa actividad está pensada para realizarse utilizando el software GeoGebra. Este es un software matemático interactivo libre que funciona en múltiples sistemas operativos (*Windows, macOS, GNU/Linux, Android, iOS*), el cual es utilizado en la educación en colegios y universidades. Esto significa que puede descargarse y usarse libremente en computadoras, tablets o teléfonos celulares. Es sencillo usarlo y sumamente útil a la hora de corroborar tus resoluciones. Sin embargo, debido al tiempo disponible en el aula, no está prevista la realización de estas actividades. Es por ello que cada vez que veas este logo, puedes omitir esa consigna. No obstante, si aceptas el desafío, te invitamos a realizar algunas de ellas para descubrir las potencialidades que presenta su uso.

COLECCIÓN **CÁTEDRA**

MAT

Segunda edición ampliada

MATEMÁTICA

MANUAL DE MATEMÁTICA PREUNIVERSITARIA

Marilina Carena

ediciones UNL

Contenido

Prefacio III

El razonamiento matemático VII

1. Conjuntos **1**
1.1. El concepto de conjunto 1
1.2. Operaciones entre conjuntos 5

2. Conjuntos numéricos **10**
2.1. Números naturales y enteros 10
2.2. Números racionales e irracionales 13
2.3. Números reales 17
2.3.1. Operaciones y propiedades 18
2.3.2. Notación científica 40
2.3.3. Orden en los números reales 41
2.3.4. Valor absoluto 45

3. Polinomios y expresiones racionales **54**
3.1. Polinomios 54
3.2. Operaciones entre polinomios 58
3.2.1. Suma y resta de polinomios 58
3.2.2. Producto de polinomios 61
3.2.3. División de polinomios 66
3.3. Factorización de polinomios 72
3.4. Expresiones racionales 88

4. Ecuaciones e inecuaciones **95**
4.1. El lenguaje matemático 95
4.2. Resolución de ecuaciones 98
4.3. Ecuaciones de segundo grado 114
4.4. Sistemas de ecuaciones lineales 125
4.5. Inecuaciones 132

5. Funciones **148**
5.1. El concepto de función 148
5.2. Función afín 172
5.3. Sistemas de ecuaciones lineales: interpretación gráfica 202
5.4. Sistemas de inecuaciones lineales 208
5.5. Función cuadrática 218
5.6. Función exponencial 244
5.7. Función logarítmica 265
5.8. Análisis de funciones a partir de la gráfica 278

6. Resolución de triángulos rectángulos **300**
6.1. Razones trigonométricas 300
6.2. Problemas del observador 312

Autoevaluaciones **317**
Los Student Birds 317
El tiro libre 327
El problema de Bart 328
Autoevaluación clásica 1 330
Autoevaluación clásica 2 332

Respuestas **334**

Índice alfabético **373**

Capítulo 1

Conjuntos

1.1. El concepto de conjunto

El concepto de **conjunto** es muy intuitivo y representa para la matemática la misma idea que en la vida cotidiana: una colección de "objetos" que poseen alguna propiedad en común. Los objetos que conforman un conjunto son llamados **elementos**.

Por ejemplo, podemos considerar el conjunto de los días de la semana, el conjunto de las letras del abecedario, el conjunto de las provincias de Argentina, y así podemos hallar una cantidad infinita de ejemplos de conjuntos.

Un requisito clave para que una agrupación de objetos pueda ser llamada conjunto, es que se pueda determinar si cierto objeto pertenece o no a él. Luego, la agrupación de objetos lindos *no* es un conjunto ya que habrá cosas que para algunos son lindas pero para otros no.

Usualmente se usan letras mayúsculas para denotar al conjunto, y letras minúsculas para sus elementos, aunque esto es solamente una convención y no una regla.

Un conjunto puede definirse de las dos siguientes maneras:

- por **extensión:** enumerando todos y cada uno de sus elementos;
- por **comprensión:** diciendo cuál es la propiedad que los caracteriza.

Ejemplo 1. **Definiendo conjuntos.** Para comprender lo anterior, consideremos el conjunto A de las vocales. Para definir A por extensión escribimos

$$A = \{\text{a, e, i, o, u}\},$$

mientras que por comprensión se escribe

$$A = \{\text{las vocales}\} \qquad \text{o bien} \qquad A = \{x\colon x \text{ es vocal}\}.$$

En el último caso se lee "A es el conjunto de todas las x **tal que** x es vocal", es decir, los dos puntos se leen como "tal que". «

Notar que un conjunto se denota encerrando entre *llaves* a sus elementos (separando los mismos con comas si se define por extensión), o a su propiedad característica (si se define por comprensión).

Un conjunto puede ser **finito**, es decir, puede estar formado por una cantidad finita de elementos (por ejemplo 5 elementos, 10 o un millón de elementos, no importa si son muchos, e incluso puede no tener ninguno), o bien contener una cantidad infinita de ellos y, en tal caso, se llama conjunto **infinito**. Por ejemplo, el conjunto de los números naturales (que veremos en detalle en el Capítulo 2) es un conjunto infinito. Si queremos enunciar este conjunto por extensión, se utilizan los puntos suspensivos para indicar que la lista de elementos sigue:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}.$$

Si x es un elemento de un conjunto A dado, se dice que x **pertenece** a A, y se denota

$$x \in A.$$

En caso contrario, si x no es un elemento de A, se denota $x \notin A$. Por ejemplo, para el caso del conjunto A de las vocales tenemos que $\text{e} \in A$, pero $\text{m} \notin A$.

Una relación natural entre conjuntos es la **igualdad**. Se dice que dos conjuntos A y B son **iguales** si ambos tienen exactamente los mismos elementos, y en tal caso escribimos $A = B$. Notar que los siguientes conjuntos son iguales

$$A = \{\text{a, e, i, o, u}\}, \qquad B = \{\text{i, o, u, a, e}\}, \qquad C = \{\text{a, o, e, a, o, u, i}\},$$

ya que al definir un conjunto no importa en qué orden se listen los elementos ni cuántas veces se repita a cada uno. Luego, $A = B = C$.

Existe otra relación entre conjuntos que también es muy natural, y es la de **inclusión**. Se dice que un conjunto A está **incluido** (o **contenido**) en otro conjunto B, si todo elemento de A es también elemento de B. Si esto ocurre, se denota por

$$A \subseteq B.$$

También suele decirse que A es **subconjunto** de B. Por ejemplo, si como antes A es el conjunto de las vocales, y B es el conjunto de todas las letras del abecedario, entonces $A \subseteq B$. También $\{\text{e}\} \subseteq A$.

Si $A = B$, entonces también vale que $A \subseteq B$ y que $B \subseteq A$. Recíprocamente, si tenemos que $A \subseteq B$ y que $B \subseteq A$, entonces se puede concluir que $A = B$.

 No deben confundirse los símbolos $\in$ y $\subseteq$, ya que el primero relaciona un elemento con un conjunto, mientras que el segundo se usa para relacionar dos conjuntos. Luego, para el caso del conjunto A de las vocales, es *correcto* escribir

$$\mathrm{e} \in A, \quad \text{y también} \quad \{\mathrm{e}\} \subseteq A, \qquad \checkmark$$

pero es *incorrecto* escribir

$$\mathrm{e} \subseteq A, \quad \text{y también} \quad \{\mathrm{e}\} \in A. \qquad \times$$

El último caso sería correcto si los elementos del conjunto A fueran a su vez otros conjuntos. Por ejemplo, si

$$A = \{\{\mathrm{a}, \mathrm{i}\}, \{\mathrm{e}\}, \{\mathrm{e}, \mathrm{u}\}\},$$

entonces A es un conjunto cuyos elementos son los conjuntos $\{\mathrm{a}, \mathrm{i}\}$, $\{\mathrm{e}\}$ y $\{\mathrm{e}, \mathrm{u}\}$. En este caso sí es verdad que $\{\mathrm{e}\} \in A$, ya que ahora el conjunto compuesto por la letra "e" es un elemento de A. Sin embargo, no es verdad ahora que $\mathrm{e} \in A$.

Para aclarar las ideas, puede pensarse un conjunto como una "bolsa" que tiene elementos adentro. Entonces, en el ejemplo anterior, se trata de una gran bolsa, conteniendo a su vez otras bolsas: una que contiene la letra e, y otras dos con dos letras cada una. Entonces, los elementos de la bolsa grande son a su vez bolsas (sin importar lo que estas contengan).

Existe un conjunto muy particular llamado **conjunto vacío**, que como su nombre lo indica, es el que no contiene elementos. Este conjunto se denota como $\varnothing$ o $\{\,\}$ (pero es **incorrecto** escribir $\{\varnothing\}$, ya que esto define un conjunto formado por el conjunto vacío como único elemento, y al contener un elemento, ya no es un conjunto vacío).

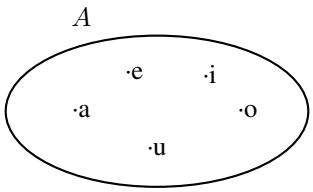
Notar que el conjunto vacío está contenido en cualquier otro conjunto, es decir, $\varnothing \subseteq A$ para todo conjunto A. Esto es cierto ya que para que se verifique la inclusión, se debe cumplir que todo elemento del conjunto vacío sea también un elemento de A, pero como el vacío no tiene elementos, no hay nada que chequear. Además, es claro que todo conjunto A está incluido en sí mismo, es decir, $A \subseteq A$. Por lo tanto, todo conjunto A tiene siempre como subconjuntos al vacío y a sí mismo.

Se dice que B es **subconjunto propio** de A, si B es subconjunto de A pero "es más chico" que A (es decir, no es el mismo A). Esto significa que existen elementos de A que no están en B, lo que en símbolos se expresa como:

$$B \subseteq A \quad \text{y} \quad B \neq A.$$

Para indicar que B es subconjunto propio de A se utiliza la notación $B \subsetneq A$.

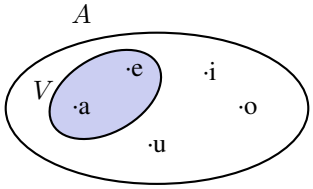
Una forma de comprender mejor las relaciones entre conjuntos, y en especial las operaciones entre ellos que veremos en la próxima sección, es realizar una representación gráfica de los mismos. Para ello se utiliza lo que se conoce como **diagrama de Venn**, en homenaje a su creador, que consiste en líneas circulares u ovaladas cerradas, donde se disponen los elementos señalados mediante puntos. El conjunto A de las letras vocales quedaría representado así:



Si consideramos ahora el conjunto V definido por comprensión como

$$V = \{\text{vocales que aparecen en la palabra “examen”}\},$$

es sencillo verificar que $V = \{\text{a, e}\}$, por lo que V es un subconjunto propio de A. Esto puede representarse gráficamente como:



Ejercicios 1.1

1. Sean A, B y C los siguientes conjuntos definidos por comprensión como

$$A = \{\text{letras que aparecen en la palabra “regalar”}\},$$
$$B = \{\text{vocales que aparecen en la palabra “regalar”}\},$$
$$C = \{\text{letras que aparecen en la palabra “alegrar”}\}.$$

(a) Definirlos por extensión.

(b) Determinar si $B \subseteq A$ y si $A = C$. Justificar.

2. Dados los conjuntos

$$F = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad G = \{2, 4\}, \quad H = \{\{1, 3, 5\}, \{2\}, \{2, 4\}\},$$

decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando la respuesta:

(a) $2 \in F$ **(b)** $F \subseteq G$ **(c)** $G \subseteq F$
(d) $\{2, 4\} \in F$ **(e)** $\{2, 4\} \in H$ **(f)** $G \in H$
(g) $\{2\} \in F$ **(h)** $\{2\} \in H$ **(i)** $\{1, 5\} \subseteq F$

3. Considerar los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4\}$ y $C = \{4, 7\}$. Responder y justificar:

(a) ¿B es subconjunto de A?

(b) ¿C es subconjunto de A?

(c) ¿A es subconjunto de C?

(d) ¿B es igual a C?

1.2. Operaciones entre conjuntos

En esta sección analizaremos las siguientes operaciones entre conjuntos: unión, intersección, diferencia y complemento.

Unión de conjuntos. Dicho de manera informal, la unión de conjuntos es, como su nombre lo indica, "juntar" todos los elementos pertenecientes a cada uno, y formar uno nuevo con dichos elementos. Dados dos conjuntos A y B, la **unión** de ellos se denota como $A \cup B$, y es otro conjunto que contiene todos los elementos de A y todos los elementos de B. En símbolos, esto se escribe

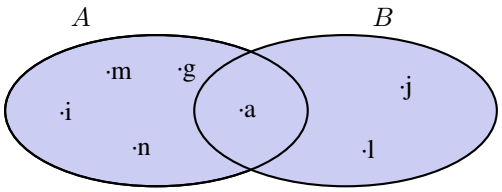
$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

La unión de más de dos conjuntos se define de la misma manera.

Ejemplo 2. **Uniendo conjuntos.** Sea A el conjunto formado por las letras de la palabra "imagina", y sea $B = \{\text{j, l, a}\}$. Entonces

$$A \cup B = \{\text{i, m, a, g, n}\} \cup \{\text{j, l, a}\} = \{\text{i, m, a, g, n, j, l}\}.$$

Gráficamente, $A \cup B$ es la zona sombreada:



«

Ejemplo 3. **Uniendo más de dos conjuntos.** Si $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ y $C = \{7\}$, entonces

$$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$ «

Ejemplo 4. **Uniendo el conjunto vacío.** Notar que $A \cup \varnothing = A$ para cualquier conjunto A. Esto ocurre ya que, al unir con el conjunto vacío, no se agrega ningún elemento. «

Ejemplo 5. **Uniendo un subconjunto.** Si $B \subseteq A$ entonces $A \cup B = A$, ya que los elementos de B no agregan nada nuevo al conjunto "más grande", que era A. Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{2, 4\}$, entonces

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} = A. \quad «$$

Intersección de conjuntos. Dados dos conjuntos A y B, la **intersección** de ellos es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a ambos, es decir, los elementos que tienen en común. Se denota por $A \cap B$, y se define simbólicamente como

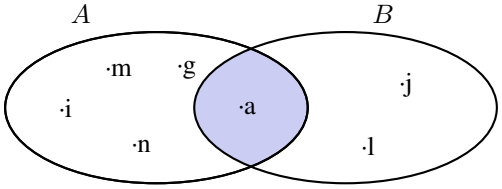
$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

Como antes, la intersección de más de dos conjuntos se define de la misma manera. Si $A \cap B = \varnothing$, se dice que A y B son conjuntos **disjuntos**.

Ejemplo 6. **Intersecando conjuntos.** Consideremos los conjuntos A y B del Ejemplo 2, es decir,

$$A = \{\text{i, m, a, g, n}\}, \qquad B = \{\text{j, l, a}\}.$$

Luego, $A \cap B = \{\text{a}\}$, ya que el elemento "a" es el único que pertenece a ambos conjuntos. Gráficamente, $A \cap B$ es la zona sombreada:



«

Ejemplo 7. **Intersecando con el conjunto vacío.** Notar que $A \cap \varnothing = \varnothing$ para cualquier conjunto A, pues ningún elemento está en el conjunto vacío. «

Ejemplo 8. **Intersecando con un subconjunto.** Si $B \subseteq A$ entonces $A \cap B = B$, ya que todos los elementos de B pertenecen también al conjunto "más grande" A. Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{2, 4\}$, entonces se tiene que

$$A \cap B = \{2, 4\} = B. \quad «$$

Diferencia de conjuntos. Llamamos **diferencia** entre dos conjuntos A y B al conjunto formado por todos los elementos de A que **no** están en B. Denotamos a este conjunto con $A - B$. En símbolos, esto se escribe como

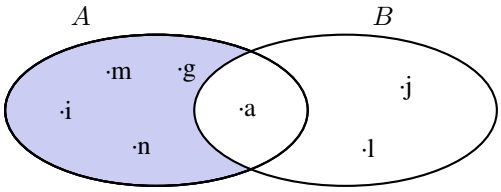
$$A - B = \{x : x \in A \text{ y } x \notin B\}.$$

En palabras, el conjunto $A - B$ se forma con todos los elementos de A, a los cuales les "quitamos" los que a su vez pertenecen a B. De esta definición se observa que $A - B$ es un subconjunto de A: $A - B \subseteq A$.

Ejemplo 9. **Diferencia de conjuntos.** Consideremos los conjuntos A y B del Ejemplo 2, es decir,

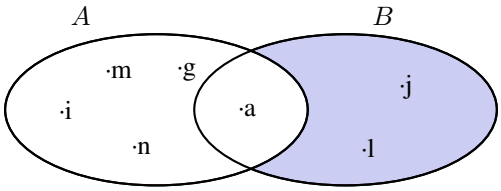
$$A = \{\text{i, m, a, g, n}\}, \qquad B = \{\text{j, l, a}\}.$$

Luego, $A - B = \{\text{i, m, g, n}\}$. Gráficamente, $A - B$ es la zona sombreada:

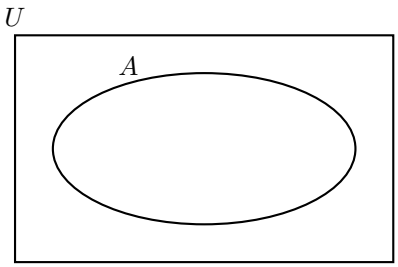


«

Notar que en las operaciones anteriores (unión e intersección), no importaba el orden en que aparecían los conjuntos. Es decir, $A \cup B = B \cup A$ y $A \cap B = B \cap A$. Sin embargo, en la diferencia de conjuntos sí importa el orden: **no es lo mismo $A - B$ que $B - A$**. Para verlo, es suficiente con observar que en el ejemplo anterior tenemos que $B - A = \{\text{j, l}\}$, que corresponde a la zona sombreada en el siguiente diagrama de Venn:



Muchas veces trabajamos con uno o más conjuntos cuyos elementos pertenecen a un conjunto más grande llamado **universal**, el cual es denotado en general con la letra U y representado gráficamente en un diagrama de Venn mediante un rectángulo que contiene a los demás conjuntos con los que estamos trabajando:



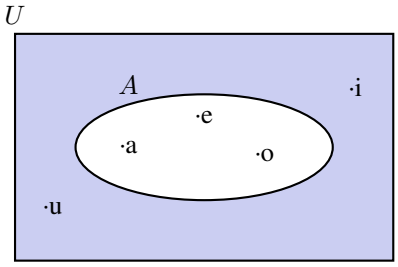
Este conjunto universal dependerá del caso particular que estemos considerando. Por ejemplo, si hablamos de las letras de una palabra, podemos tomar como conjunto universal a todas las letras del abecedario; si trabajamos con el conjunto $\{1, 4, 7\}$ podemos tomar como conjunto universal al conjunto de los números naturales, pero también al de los enteros o al conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ de todos los dígitos. Para evitar estas ambigüedades, siempre que sea necesario indicaremos cuál es el conjunto universal.

Complemento de un conjunto. Dados dos conjuntos A y U tales que $A \subseteq U$, el conjunto $U - A$ es llamado el **complemento** del conjunto A con respecto a U, y se denota como A_U^c. En otras palabras, A_U^c es el conjunto formado por todos los elementos de U que *no* pertenecen a A. Cuando se ha especificado previamente un conjunto universal U, el complemento de A con respecto a U se denota simplemente como A^c.

Ejemplo 10. **El complemento de un conjunto.** Consideremos los conjuntos $U = \{\text{a, e, i, o, u}\}$ de las vocales, y $A = \{\text{a, e, o}\}$. Entonces, tenemos que

$$A_U^c = U - A = \{\text{i, u}\}.$$

Gráficamente, A_U^c es la zona sombreada:



«

Ejercicios 1.2

1. Consideremos los conjuntos A, B y C definidos como

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \qquad B = \{2, 4, 5\}, \qquad C = \{3, 4, 6\}.$$

Representar usando diagramas de Venn y por extensión los siguientes conjuntos, donde el conjunto universal U es el definido en el primer inciso (es decir, todos los complementos deberán tomarse con respecto a dicho U):

(a) $U = A \cup B \cup C$

(b) $A \cap B$

(c) $(A \cap C)^c$

(d) $A \cap B \cap C$

(e) $(A \cup B) \cap C$

(f) $A - C$

(g) B^c

(h) $(A \cup B) - C$

(i) $A \cup (B - C)$

(j) $(A \cup B)^c$

2. Consideremos los conjuntos A, B y C definidos como

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \qquad B = \{4, 5, 6\}, \qquad C = \{4, 7\}.$$

Representar mediante diagramas de Venn y por extensión los conjuntos indicados en el ejercicio anterior.

3. Sea U un conjunto universal dado, y consideremos $A \subsetneq U$. Utilizar un ejemplo particular para intuir (sin demostrar) el resultado de hacer las operaciones $A \cap A^c$ y $A \cup A^c$.

Capítulo 2

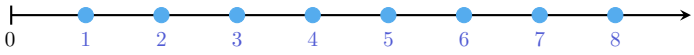
Conjuntos numéricos

2.1. Números naturales y enteros

Los **números naturales** forman el primer conjunto de números que fue utilizado por los seres humanos, tanto para contar objetos como para ordenarlos. Por ejemplo, 1, 4 y 82 son números naturales. El conjunto de los números naturales se denota con el símbolo $\mathbb{N}$. Existe una controversia respecto a considerar al cero (0) como un número natural, ya que en ciertas ramas de la matemática lo consideran como tal, pero en otras no. En este texto vamos a excluirlo, es decir, consideraremos

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}.$$

Usaremos la notación $\mathbb{N}_0$ para denotar el conjunto de los números naturales que incluye al cero, es decir, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. El conjunto $\mathbb{N}$ puede representarse en una semirrecta con puntos igualmente espaciados como se ve a continuación:



Se tiene que $\mathbb{N}$ es un **conjunto ordenado**: un número natural es **menor** que otro* si está colocado a la izquierda de él en la recta numérica. Por ejemplo, 5 es menor que 7, lo que se escribe en símbolos como $5 < 7$. De la misma forma, un número natural es **mayor** que otro, si está colocado a la derecha de él en la recta numérica. Para denotar con símbolos que 6 es mayor que 3, se escribe $6 > 3$.

Como ya mencionamos, $\mathbb{N}$ es un conjunto **infinito** que tiene un primer elemento, pero no un último. Cada número natural tiene un **sucesor** (es decir, otro

*Como explica el Diccionario panhispánico de dudas de la RAE, el segundo término de esas comparaciones debe ir introducido por la conjunción **que** ("El precio es mayor que 10") o por la preposición **de** ("El precio es mayor de lo esperado"), pero censura el uso de la preposición **a** ("El precio es mayor a 10" ✗).

número natural que se encuentra justo a la derecha de él en la recta numérica), y cada número natural, excepto el 1, tiene un **antecesor** (el número natural que se encuentra justo a su izquierda en la recta numérica). Por ejemplo, el sucesor del número 5 en el conjunto de los números naturales es el 6, mientras que su antecesor es el 4.

Es claro que entre dos números naturales hay una cantidad finita de números naturales, por eso se dice que el conjunto es **discreto**.

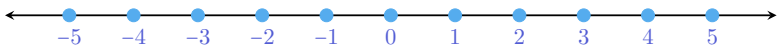
👉 Por simplicidad, diremos "los números naturales" o "los naturales" para referirnos al *conjunto* formado por dichos números. Lo mismo haremos con el resto de los conjuntos numéricos que presentaremos en esta sección.

Con respecto a la operaciones básicas, recordemos que la suma y multiplicación de números naturales dan como resultado otro número natural, pero no ocurre lo mismo con la resta y con la división. Aunque definiremos formalmente más adelante estas operaciones, todos conocemos ya su significado.

Para el caso de la resta, el resultado de restar dos números naturales será otro número natural siempre que el minuendo sea mayor que el sustraendo (es decir, si m y n son números naturales, entonces $m - n \in \mathbb{N}$ siempre que $m > n$). Sin embargo, no existe un número natural que sea el resultado de hacer la resta $3-18$. Puesto que este tipo de operaciones representan situaciones que aparecen en la vida cotidiana (por ejemplo, si tengo una deuda de \$18 y dispongo solamente de \$3 para entregar, el resultado es que sigo debiendo \$15), se agregaron símbolos que permitieran representarlas. Estos símbolos fueron el cero y los opuestos de los naturales:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}.$$

El conjunto $\mathbb{Z}$ es llamado conjunto de los **números enteros**, y se representa en la **recta numérica** de la siguiente forma:



Notar que podemos escribir

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+,$$

siendo $\mathbb{Z}^- = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1\}$ el conjunto de los **enteros negativos**, y $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ el conjunto de los **enteros positivos** (o naturales). Así, el conjunto de los números naturales está contenido en el de los enteros.

Los enteros negativos se utilizan para describir valores que se encuentran por debajo de un valor tomado como referencia: alturas por debajo del nivel del mar, temperaturas bajo cero, pisos por debajo del suelo (como los edificios que tienen uno o más subsuelos diseñados para cocheras o depósitos).

Al igual que los naturales, los enteros constituyen un conjunto **ordenado**, **infinito** y **discreto**. La diferencia es que no tiene primer elemento, y todo número entero tiene un antecesor y un sucesor entero.

Como antes, un número entero es menor que otro si está colocado a la izquierda de él en la recta numérica, y es mayor que otro si está a la derecha de él. Entonces, tenemos por ejemplo las siguientes relaciones:

$$-5 < -3; \qquad 3 > -2; \qquad 0 > -7; \qquad 3 < 5.$$

Lo anterior se lee "-5 es menor que -3"; "3 es mayor que -2"; "0 es mayor que -7" y "3 es menor que 5". Notar que todas las desigualdades pueden escribirse y leerse de otra manera. Por ejemplo, la última puede escribirse también como $5 > 3$, y leerse "5 es mayor que 3".

Así, si m y n son números enteros tales que m es mayor que n, podemos escribir indistintamente

$$m > n \qquad \text{o} \qquad n < m.$$

Además, el símbolo $n \leq m$ se lee "n es menor o igual que m" y significa que o bien $n < m$, o bien $n = m$. Análogamente, $m \geq n$ se lee "m es mayor o igual que n" y significa que o bien $m > n$, o bien $m = n$. Por ejemplo, $2 \leq 5$ es una afirmación verdadera, y también lo es $2 \leq 2$.

Ejemplo 11. **Utilizando los signos de orden.** Si el conjunto A se define por comprensión como

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 5\},$$

entonces A se escribe por extensión como $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Ahora, si consideramos

$$B = \{n \in \mathbb{Z} : n \leq 5\},$$

entonces B se escribe por extensión como $B = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Si definimos

$$C = \{n \in \mathbb{Z} : -2 \leq n < 5\},$$

entonces tenemos que $C = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Notar que en este último caso el entero 5 *no* pertenece al conjunto C, ya que en su definición aparece un signo "menor" ($<$) en lugar de un signo "menor o igual" ($\leq$). «

Las desigualdades como las que definen al conjunto C del ejemplo anterior se conocen con el nombre de **doble desigualdad**, y corresponden a cualquiera que tenga alguna de las siguientes formas:

$$a < x < b, \qquad a \leq x < b, \qquad a \leq x \leq b, \qquad a < x \leq b.$$

En todos los casos se refiere a los valores de x comprendidos entre a y b, pudiendo incluir a uno, ambos o ninguno de estos valores "extremos", según si la

desigualdad es estricta o no: en el primer caso no incluye a ninguno, en el segundo incluye a a pero no a b, en el tercero se incluye tanto a a como a b, y en el último a b pero no a a. Así, el conjunto C del ejemplo anterior puede escribirse también de las siguientes formas equivalentes:

$$C = \{n \in \mathbb{Z} : -2 \leq n \leq 4\} = \{n \in \mathbb{Z} : -3 < n \leq 4\} = \{n \in \mathbb{Z} : -3 < n < 5\}.$$

No hay que olvidarse de la primera condición "$n \in \mathbb{Z}$" que aparece en la definición de C, ya que está diciendo que debemos quedarnos solamente con los *enteros* que satisfacen la doble desigualdad (aunque aún no definimos otros números, sabemos que existen otros no enteros comprendidos entre los extremos dados en cada caso). Teniendo en cuenta esto, también se puede definir el mismo conjunto C como

$$C = \{n \in \mathbb{Z} : -2 \leq n \leq 4.3\},$$

por ejemplo. Así, la condición $n \leq 4.3$ permite incluir al número no entero 4.3, pero la condición $n \in \mathbb{Z}$ lo excluye. En lo anterior, como a lo largo de todo el libro, se usará el punto como signo separador de los decimales (en lugar de una coma).

Ejercicios 2.1

1. Ordenar de menor a mayor los siguientes números enteros:

$$12,\ -7,\ 4,\ 8,\ -2,\ 0,\ -15,\ 6.$$

2. Expresar por extensión los siguientes conjuntos:

$$A = \{n \in \mathbb{Z} : -5 < n \leq 4\}, \qquad B = \{n \in \mathbb{Z} : -2 \leq n < 6\},$$
$$C = \{n \in \mathbb{Z} : 4 \leq n \leq 8.2\}, \qquad D = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 7\}.$$

3. Utilizar desigualdades dobles para expresar los siguientes conjuntos:

$$E = \{2, 3\}, \quad F = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}, \quad G = \{7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11\}.$$

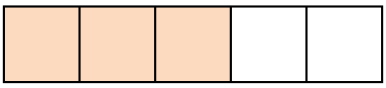
4. Determinar si los siguientes conjuntos tienen un primer elemento. En caso de tenerlo, indicar cuál es:

$$H = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 4.5\}, \qquad I = \{n \in \mathbb{Z} : n \leq 8\},$$
$$J = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 8\}, \qquad K = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq -3\}.$$

2.2. Números racionales e irracionales

Así como vimos que fue necesario agregar símbolos (los enteros) que representen el resultado de restarle a un número natural otro natural mayor o igual

que el primero, veremos ahora un nuevo conjunto numérico, que permite representar el resultado de dividir dos naturales cualesquiera. Es así como surgen los números racionales, ligados con el concepto de **fracción**. Si bien no se profundizará aquí en el concepto de fracción (ya que pertenece a la formación básica del alumno), recordaremos brevemente la idea: si $n, m \in \mathbb{N}$, entonces en la fracción $\frac{n}{m}$ el número m es llamado **denominador** y representa en cuántas partes iguales se ha dividido la unidad (el todo), mientras que n es llamado **numerador** y nos indica cuántas de dichas partes se deben tomar. Por ejemplo, la imagen a continuación representa gráficamente a la fracción $\frac{3}{5}$.



Cuando el numerador es menor que el denominador, la fracción es llamada **propia** y su valor es menor que 1. En caso contrario, es llamada **impropia**, siempre que el numerador no sea un múltiplo del denominador. Si el numerador es un múltiplo del denominador, la fracción es llamada **aparente**, pues en realidad representa un valor entero. Tanto las fracciones impropias como las aparentes, corresponden a un número mayor o igual que la unidad.

$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{21}{3}$
propia	impropia	aparente

Dos fracciones $\frac{n}{m}$ y $\frac{p}{q}$ son **equivalentes** si representan la misma parte del todo, y en tal caso se denota

$$\frac{n}{m} = \frac{p}{q}.$$

Por ejemplo, las siguientes fracciones son equivalentes, ya que todas representan la mitad del todo:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{5}{10}.$$

Para definir formalmente el conjunto de los números racionales, se generaliza el concepto de fracción permitiendo valores negativos. Precisamente, el conjunto $\mathbb{Q}$ de los **números racionales** se define como

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}.$$

Es decir, es el conjunto formado por todas las fracciones con numerador y denominador ambos números enteros, y denominador no nulo (es decir, distinto de cero). Dos fracciones equivalentes representan el mismo número racional. Luego, los racionales $\frac{-n}{m}$ y $\frac{n}{-m}$ son iguales, y se los representa como $-\frac{n}{m}$.

Lo siguiente resulta un criterio muy útil para determinar si dos fracciones son equivalentes o no: si $n, m, p, q \in \mathbb{Z}$ con $m, q \neq 0$, entonces

$$\frac{n}{m} = \frac{p}{q} \text{ si y solo si } nq = pm.$$

Todo número racional en forma de fracción de enteros puede expresarse en base decimal. Desde el punto de vista numérico, la fracción $\frac{n}{m}$ posee una **expresión decimal**, la cual se obtiene haciendo la división de n entre m. Las representaciones decimales de números racionales no enteros son de dos tipos: decimales exactos o decimales periódicos (puros o mixtos). Al alumno que no recuerde estos conceptos u otros relacionados (como representación de fracciones en la recta numérica), se recomienda que haga un breve repaso de los mismos.

Notar que $\frac{n}{1} = n$ para cualquier entero n, por lo que el conjunto de los números enteros representa un subconjunto de los racionales.

Una fracción **irreducible** es aquella que no se puede **simplificar** (reducir), lo que significa que no existe otra fracción equivalente que se pueda escribir con "números más pequeños". Hablando en términos matemáticos, una fracción es irreducible cuando el numerador n y el denominador m no tienen divisores positivos en común (además de la unidad), con $n \in \mathbb{Z}$ y $m \in \mathbb{N}$, por lo que se dice que está escrita en su mínima expresión. Para llevar una fracción a su forma irreducible, se divide tanto su numerador como su denominador por un mismo entero que sea factor común a ambos, hasta que sea posible. Este proceso es conocido como "simplificar" la fracción. Por ejemplo, la fracción $\frac{12}{18}$ puede reducirse dividiendo por 6 tanto el numerador como el denominador, para llevarla a su forma irreducible $\frac{2}{3}$.

$$\frac{12}{18} = \frac{2}{3} \rightsquigarrow \text{forma irreducible.}$$

Cada fracción se representa como un punto de la recta numérica, y se ubica en una posición intermedia entre dos números enteros consecutivos. Podemos comparar dos números racionales cuyos denominadores son *positivos* de la siguiente manera:

$$\frac{n}{m} < \frac{p}{q} \quad \text{si y solo si} \quad nq < pm \quad (m, q > 0).$$

Si se quiere aplicar el criterio anterior para racionales negativos, observemos que, como se dijo antes, $-\frac{n}{m} = \frac{n}{-m} = \frac{-n}{m}$ para todo par de naturales n y m, por lo que siempre podemos hacer que el numerador se "lleve" el signo menos, obteniendo así denominador positivo.

Recordemos que la suma y el producto de dos racionales se definen respectivamente como:

$$\frac{n}{m} + \frac{p}{q} = \frac{nq + pm}{mq}, \qquad \frac{n}{m} \cdot \frac{p}{q} = \frac{np}{mq}.$$

Una propiedad fundamental de los números racionales que queremos recordar aquí es la de **orden denso**[*]. Esta propiedad establece que:

Si x e y son dos números racionales tales que $x < y$, entonces existe otro racional z satisfaciendo $x < z < y$.

Esto dice que entre dos números racionales hay siempre otro racional (lo cual no es cierto con los enteros, pues entre dos consecutivos no hay otro entero estrictamente comprendido entre ellos), y de esto puede deducirse que entre dos números racionales (que pueden estar tan cerca entre sí como se quiera), hay infinitos racionales. Pero, ¿cómo pasamos de decir que existe uno a que existen infinitos? Muy simple, tomemos dos números racionales x e y, y supongamos que $x < y$. Sabemos entonces que existe $z_1 \in \mathbb{Q}$ tal que $x < z_1 < y$. Volviendo a aplicar el mismo razonamiento con el nuevo par de racionales z_1 e y (o con x y z_1), tenemos que existe otro número racional z_2 tal que $z_1 < z_2 < y$. De esta manera podemos seguir, y encontrar una lista sin fin de racionales z_i todos diferentes, comprendidos entre x e y.

Sin embargo, a pesar de existir tantos números racionales, se ha demostrado que existen números que no pueden expresarse como $\frac{n}{m}$, para ningún par de enteros n y m ($m \neq 0$). Estos números son llamados **irracionales**, y son aquellos cuya expresión decimal tiene infinitas cifras no periódicas. Algunos irracionales "famosos" son

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= 1.41421356237\ldots \\ \sqrt{3} &= 1.73205080756\ldots \\ \pi &= 3.14159265358\ldots \\ e &= 2.71828182845\ldots \end{aligned}$$

El conjunto de todos los números irracionales se denota con el símbolo $\mathbb{I}$. Notar que un número es o bien racional, o bien irracional, pero no puede ser ambas cosas a la vez. Es decir, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ son conjuntos disjuntos, lo que denotábamos como $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$.

[*]Esta propiedad es a veces llamada **densidad** de los racionales, pero no es correcto, ya que la densidad es una propiedad que relaciona un conjunto con otro, y no es una propiedad del conjunto en sí mismo.

Ejercicios 2.2

1. Clasificar las siguientes fracciones según sean propias, impropias o aparentes:

$$\frac{3}{4}, \quad \frac{7}{4}, \quad \frac{9}{3}, \quad \frac{9}{4}, \quad \frac{3}{7}.$$

2. Determinar si los siguientes pares de fracciones son equivalentes o no. Justificar.

$$\frac{2}{3} \text{ y } \frac{8}{24}; \qquad \frac{1}{3} \text{ y } \frac{8}{24}; \qquad \frac{3}{4} \text{ y } \frac{9}{8}; \qquad \frac{5}{3} \text{ y } \frac{15}{9}.$$

3. Completar las casillas vacías de modo de obtener fracciones equivalentes:

$$\frac{4}{5} = \frac{16}{\square}; \qquad \frac{3}{7} = \frac{\square}{28}; \qquad \frac{5}{3} = \frac{-5}{\square}; \qquad \frac{-6}{4} = \frac{\square}{2}.$$

4. Reducir las siguientes fracciones a su mínima expresión:

$$\frac{10}{8}, \quad \frac{9}{24}, \quad \frac{-1}{-3}, \quad \frac{28}{21}, \quad \frac{36}{60}.$$

5. Un tanque tiene una capacidad de 1200 litros de agua. Indicar los litros de agua que hay en $\frac{2}{5}$ y en $\frac{3}{4}$ del tanque, y realizar un gráfico que ilustre estas cantidades.

6. Se disponen de \$2975 para organizar una cena, de los cuales se destinan $\frac{2}{7}$ para bebida y $\frac{3}{5}$ para comida. Indicar cuánto dinero se usará en bebida y cuánto en comida. ¿Qué fracción del total queda disponible para otros gastos?

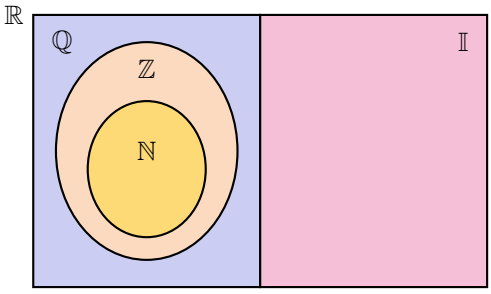
7. En un supermercado hay dos marcas de leche. La leche marca A viene en un envase de 600 cm^3 que cuesta \$24, mientras que el precio de la leche marca B es de \$21 y contiene 700 cm^3. Hallar qué fracción de un litro contiene cada envase, y usarlo para determinar el valor del litro de cada marca.

2.3. Números reales

El conjunto de los **números reales** es denotado por $\mathbb{R}$, y se define como

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

Es decir, todos los números presentados anteriormente son números reales. Pensando a todos los conjuntos numéricos como elementos despojados de las operaciones que estudiaremos en lo que resta de la sección, tenemos la siguiente representación gráfica:



2.3.1. Operaciones y propiedades

Comenzaremos recordando las **propiedades de la suma** de números reales.

Propiedades de la suma. Para x, y y z reales cualesquiera, la suma satisface las siguientes propiedades:

- **Conmutativa:** $x + y = y + x$ (el orden de los términos no afecta al resultado).
- **Asociativa:** $x + (y + z) = (x + y) + z$ (podemos elegir cómo agrupar).
- **Neutro aditivo:** $x + 0 = x$ (sumar cero no afecta al número).
- **Existencia de inverso aditivo:** para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un único elemento en $\mathbb{R}$ denotado por $-x$, llamado **opuesto** de x, que satisface $x + (-x) = 0$.

Con respecto a la existencia de opuesto, es importante notar dos cosas. La primera es que no significa que $-x$ sea un número negativo, sino que simplemente denota el opuesto del número x. Si x es negativo, entonces su opuesto $-x$ será positivo. Por ejemplo, el opuesto de 3 es -3, mientras que el opuesto de -5 es 5. En símbolos, $-(-5) = 5$. Esto se escribe en forma general como

$$-(-x) = x,$$

y significa que el opuesto del opuesto de un número, es dicho número. Observar que el opuesto del cero es él mismo, y es el único entero que satisface ser el opuesto de sí mismo.

Lo segundo a remarcar es que si en lugar de $\mathbb{R}$ nos restringimos a un conjunto más pequeño como el de los naturales $\mathbb{N}$, entonces la propiedad de existencia de opuesto dentro del conjunto no se cumple, ya que el opuesto de cualquier natural es negativo, por lo que no pertenece a $\mathbb{N}$. Si nos restringimos a $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{I}$, sí se cumple.

Recordemos ahora las **propiedades del producto** de números reales.

Propiedades del producto. Si x, y y z son reales cualesquiera, entonces valen las siguientes propiedades para el producto:

- **Conmutativa:** $x \cdot y = y \cdot x$ (el orden de los factores no afecta al resultado).
- **Asociativa:** $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (podemos elegir cómo agrupar).
- **Neutro multiplicativo:** $x \cdot 1 = x$ (multiplicar por 1 no afecta al número).
- **Existencia de inverso multiplicativo:** para cada $x \in \mathbb{R}$ *distinto de cero*, existe un único elemento en $\mathbb{R}$ denotado por x^{-1} o $\frac{1}{x}$, llamado **inverso multiplicativo** o **recíproco** de x, que satisface $x \cdot x^{-1} = 1$.

Al igual que con el elemento opuesto, si nos restringimos ahora a $\mathbb{N}$ o incluso a $\mathbb{Z}$, no se cumple que todo elemento tenga un inverso multiplicativo allí. De hecho, ningún entero, excepto 1 y -1, tienen inverso multiplicativo que sea entero. Por ejemplo, el inverso de 5 es $\frac{1}{5}$ (pues $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$), el cual no es entero. En cambio, sí se cumple que todo número en $\mathbb{Q}$ (distinto de cero) tiene su inverso multiplicativo en $\mathbb{Q}$, y lo mismo ocurre en $\mathbb{I}$.

Observar que el inverso del inverso de un número distinto de cero, es dicho número. Por ejemplo, $(5^{-1})^{-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5$. En forma general, si $x \neq 0$ entonces:

$$\left(x^{-1}\right)^{-1} = x.$$

A lo largo de todo el texto, como es usual, usaremos en forma indistinta la notación xy o $x \cdot y$ para indicar el producto entre x e y.

De las propiedades anteriores se puede deducir la **regla de los signos**:

$$x(-y) = (-x)y = -(xy) \qquad \text{y} \qquad (-x)(-y) = xy.$$

La regla anterior se recuerda de manera "gráfica" como:

$$+ \times - = -$$

$$- \times - = +$$

Antes de pasar a las demás operaciones, recordemos una propiedad conjunta de la suma y el producto:

- **Distributiva del producto respecto de la suma:** para cualesquiera números reales x, y y z, se tiene

$$x(y+z) = xy + xz.$$

Utilizaremos la suma y el producto para definir las demás operaciones: resta o diferencia, división, potenciación, radicación y logaritmo.

Resta o diferencia. La diferencia entre dos números reales x e y se define como la suma entre x y el opuesto de y:

$$x - y = x + (-y).$$

De la definición anterior se deduce que la diferencia *no* es conmutativa. Esto significa que $x - y \neq y - x$. Por ejemplo:

$$3 - 5 = 3 + (-5) = -2, \quad \text{pero} \quad 5 - 3 = 5 + (-3) = 2.$$

Además, la definición implica que

$$x - (-y) = x + y.$$

De esto se sigue la conocida regla para eliminar un paréntesis que está precedido por el signo menos: hay que cambiar los signos de cada término dentro del mismo.

Ejemplo 12. Hallar el resultado de $(-2) + 5 - (1 + (-3) + 2 - (-1 + 2))$.

Solución:

$$\begin{aligned}(-2) + 5 - (1 + (-3) + 2 - (-1 + 2)) &= -2 + 5 - (1 - 3 + 2 + 1 - 2) \\ &= -2 + 5 - (-1) \\ &= -2 + 5 + 1 = 4.\end{aligned}$$

«

No debemos olvidar la "jerarquía" de las operaciones: se debe calcular primero lo que está entre paréntesis, corchetes y llaves. Las restas se calculan de izquierda a derecha. Recordaremos luego el orden en que se realizan las operaciones combinadas.

Al estar la resta definida mediante la suma, se obtiene fácilmente la propiedad **distributiva del producto respecto de la resta**:

$$x(y - z) = x(y + (-z)) = xy + x(-z) = xy - xz.$$

División o cociente. El cociente entre dos números reales x e y, con $y \neq 0$, se define como el producto entre x y el inverso de y:

$$\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y} = x \cdot y^{-1}.$$

El cociente $\frac{x}{y}$ también se denota $x : y$. De la definición anterior se deduce que la división *no* es conmutativa: $x : y \neq y : x$. Por ejemplo:

$$10 : 5 = 2, \qquad \text{pero} \qquad 5 : 10 = \tfrac{1}{2}.$$

De hecho, si $x = 0$ entonces $y : x$ no está definido (no se permite dividir por cero), mientras que $x : y = 0$ siempre que y sea distinto de cero.

De la definiciones de cociente e inverso multiplicativo, para x e y distintos de cero, se concluye que

$$\frac{1}{\frac{x}{y}} = \frac{y}{x}.$$

Al estar el cociente definido mediante el producto, se obtiene fácilmente la propiedad **distributiva del cociente respecto de la suma**:

$$\frac{x+y}{z} = (x+y)\cdot z^{-1} = xz^{-1} + yz^{-1} = \frac{x}{z} + \frac{y}{z}.$$

donde $z \neq 0$. Análogamente se obtiene la propiedad **distributiva del cociente respecto de la resta**:

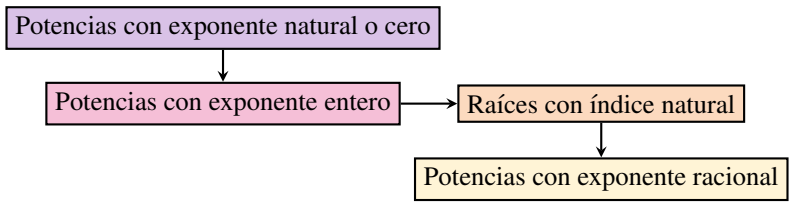
$$\frac{x-y}{z} = \frac{x}{z} - \frac{y}{z}.$$

 Un error frecuente es aplicar "al revés" la propiedad distributiva. Para el caso general,

$$\frac{x}{y+z} \neq \frac{x}{y} + \frac{x}{z}.$$

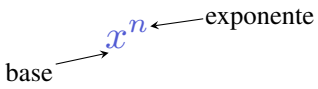
Este y otros errores frecuentes se enuncian en el Ejercicio 5 al finalizar la sección.

Pasaremos ahora a la potencia y la radicación, las cuales se definen en un orden determinado, el cual esquematizamos a continuación para organizar las ideas:



Luego analizaremos el caso de potencias con exponente real, pero de manera no formal, ya que la definición precisa escapa a los contenidos de este libro.

Potencia. Los nombres de los elementos que intervienen en una potencia son solamente dos:



Potencia con exponente natural o cero: Como se indicó en el esquema, comenzaremos recordando la definición de potencia con base real y exponente *natural*: si x es un número real y n un natural mayor que uno, la potencia x^n se define como el producto de x consigo mismo n veces:

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ factores}}.$$

Por ejemplo:

$$x^2 = x \cdot x, \qquad x^3 = x \cdot x \cdot x, \qquad x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x.$$

En lo anterior, x^2 se lee como "x al cuadrado", x^3 como "x al cubo", y x^4 como "x a la cuarta". La definición de potencia se completa para todos los exponentes naturales con $x^1 = x$ (caso $n = 1$).

Si $n = 0$, se define $x^0 = 1$ siempre que $x \neq 0$. Es decir, todo número no nulo elevado a la cero es igual a uno, por definición*:

$$x^0 = 1, \quad x \neq 0.$$

Sin embargo, no existe definición para cero elevado a la cero, por lo que 0^0 es llamado una **indeterminación**.

Ejemplo 13. **Calculando potencias.** Aplicaremos la definición de potencia para calcular las indicadas a continuación:

$$\begin{aligned} 2^3 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8, \\ (-2)^3 &= (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8, \\ 2^4 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16, \\ (-2)^4 &= (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16. \end{aligned}$$ «

*Esta definición no es arbitraria sino que se origina a partir de la división de potencias de igual base, en cuyo caso, como veremos luego, los exponentes se restan: si $x \neq 0$, $x^3 : x^3 = x^{3-3} = x^0$. Pero por otro lado, todo número dividido por sí mismo es uno, por lo que $x^3 : x^3 = x^{3-3} = 1$. Igualando se obtiene $x^0 = 1$, siempre que $x \neq 0$.

En el ejemplo anterior hemos combinado la definición de potencia junto con la regla de los signos. El procedimiento realizado nos permite concluir que cualquier número real, ya sea positivo o negativo, elevado a un exponente par da como resultado un número positivo. En cambio, si el exponente es impar, el signo no se altera: un número positivo elevado a un exponente impar da como resultado otro número positivo, y al elevar un número negativo a un exponente impar se obtiene otro negativo. Entonces, para $a \geq 0$ y n natural, se tiene que:

$$(-a)^n = \begin{cases} a^n, & \text{si } n \text{ es par;} \\ -(a^n), & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} \tag{2.3.1}$$

Ejemplo 14. **Exponentes pares e impares.** De la definición de potencia tenemos que:

$$3^2 = 9, \qquad 2^5 = 32.$$

Para bases negativas, aplicando (2.3.1) obtenemos

$$(-3)^2 = 9, \qquad (-2)^5 = -32.$$

Notar que si $a = 1$, entonces

$$(-1)^{180} = 1 \quad \text{pero} \quad (-1)^{175} = -1,$$

donde en este caso lo único que importó es que 180 es par, y 175 es impar. «

▶ **Potencia con exponente entero:** Extenderemos ahora la definición de potencia a exponentes *enteros* (es decir, veremos qué significa, por ejemplo, x^{-3}). Si n es un número natural y $x \neq 0$, se define

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

Se pide $x \neq 0$ porque no es posible dividir por cero.

Ejemplo 15. **Calculando potencias con exponentes enteros.** Aplicando la definición, obtenemos:

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8},$$

$$(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9},$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{5}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{25}{9}} = \frac{9}{25} = \left(\frac{3}{5}\right)^2. \qquad \text{«}$$

El proceso efectuado en el último ejemplo se puede escribir en forma general para obtener una regla para elevar fracciones a exponentes enteros negativos: hay que elevar la fracción recíproca (es decir, la fracción que se obtiene "dando vuelta" la original, que no es más que el inverso multiplicativo de ella), pero ahora con exponente positivo:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{-n} = \left(\frac{q}{p}\right)^{n}.$$

Como caso particular de lo anterior con $p = 1$ tenemos que:

$$\left(\frac{1}{q}\right)^{-n} = q^n.$$

En palabras, la fórmula anterior nos dice que un denominador con exponente negativo, se transforma en numerador con exponente positivo.

Ejemplo 16. **Simplificando expresiones.** Simplificar la siguiente expresión:

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{-2} \frac{3^2}{5} \frac{1}{3^{-2}}.$$

Solución: Primero aplicaremos las observaciones anteriores y la definición de potencia, y luego efectuaremos el producto:

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{-2} \frac{3^2}{5} \frac{1}{3^{-2}} = \left(\frac{3}{5}\right)^{2} \frac{3^2}{5} 3^2 = \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{3^2}{5} \cdot 3^2 = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{3^6}{5^3}. \quad \ll$$

A través de la definición de potencia hemos adelantado en el cálculo anterior una de las propiedades que enunciaremos luego (pág. 28) para exponentes más generales: cuando se multiplican potencias de igual base los exponentes se suman. Lo hemos usado para exponentes naturales, y es una consecuencia directa de la definición:

$$x^n \cdot x^m = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ factores}} \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{m \text{ factores}} = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n+m \text{ factores}} = x^{n+m}.$$

Siguiendo el esquema planteado, antes de definir potencias con exponente racional, necesitaremos la definición de la radicación con índice natural.

Radicación. Para n *natural*, decimos que un número r es **raíz n-ésima** del número x, si satisface que

$$r^n = x.$$

Para los casos $n = 2$ y $n = 3$, estas raíces se conocen como **raíz cuadrada** y **raíz cúbica**, respectivamente. Para el resto de los casos suelen utilizarse ordinales: raíz cuarta, quinta, sexta, etc.

Ejemplo 17. **Hallando raíces.**

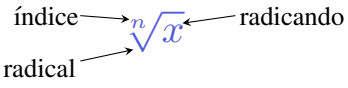
- 2 es raíz cúbica de 8, pues $2^3 = 8$.
- -2 es raíz cúbica de -8, pues $(-2)^3 = -8$.
- 2 es raíz quinta de 32, pues $2^5 = 32$.
- 9 es raíz cuadrada de 81, pues $9^2 = 81$. Pero también $(-9)^2 = 81$, por lo que -9 también es raíz cuadrada de 81. Entonces, las raíces cuadradas de 81 son ± 9 (se utiliza el símbolo $\pm$ para indicar tanto el valor positivo como el negativo).
- Puesto que $2^4 = 16$ y $(-2)^4 = 16$, 2 es raíz cuarta de 16, y -2 también.
- No existe ningún número real que sea raíz cuadrada de -4, pues todo número real elevado al cuadrado da como resultado un número no negativo.
- No existe ningún número real que sea raíz cuarta de -16, pues todo número real elevado a la cuarta da como resultado un número no negativo. «

El ejemplo anterior, junto con (2.3.1), nos conducen a la siguiente conclusión sobre las raíces n-ésimas de un número x:

x \ n	Par	Impar
✚ Positivo	dos raíces reales ✔✔	una raíz real positiva ✔
━ Negativo	no tiene raíz real ✗	una raíz real negativa ✔

Como observamos en el cuadro anterior, si n es impar entonces para cada número real x existe un único número real r satisfaciendo $r^n = x$. Esto se denota como $\sqrt[n]{x} = r$. Por ejemplo, $\sqrt[3]{8} = 2$ y $\sqrt[3]{-8} = -2$. En cambio, si n es par y x positivo, existen dos valores reales satisfaciendo $r^n = x$. Se llama **raíz n-ésima principal** de x al único número real **positivo** r que satisface dicha igualdad. Utilizamos en este caso la notación $\sqrt[n]{x} = r$ para indicar a esta raíz principal. Cuando $n = 2$, por convención no se coloca el índice: $\sqrt[2]{x}$ se escribe como $\sqrt{x}$. Por ejemplo, $\sqrt{16} = 4$*. Además, para cada natural n tenemos que $\sqrt[n]{0} = 0$, pues $0^n = 0$ sin importar el valor de n. Si x es negativo y n es par, el símbolo $\sqrt[n]{x}$ **no está definido**, ya que no es posible encontrar ningún número real r que verifique $r^n = x$.

Llamamos **radicación** al proceso de calcular la raíz n-ésima $\sqrt[n]{x}$ de un número x, con n natural, siempre que sea posible. Los nombres de los elementos involucrados en esta operación son:



*Es importante recordar que $\sqrt{x}$ **no** significa $\sqrt[1]{x}$. Notar que $\sqrt[1]{x} = x$ para todo x pues $x^1 = x$, aunque la raíz n-ésima con $n = 1$ no resulta un caso interesante.

Repetimos que cuando aparece una raíz con radicando positivo e índice par, el símbolo $\sqrt[n]{\ }$ representa solamente al valor de la raíz principal (es decir, el positivo). Este valor es el que arroja la calculadora en dicho caso. Por ejemplo:

$$\sqrt{4} = 2, \qquad \sqrt[4]{81} = 3. \quad \checkmark$$
$$\sqrt{4} = \pm 2, \qquad \sqrt[4]{81} = \pm 3. \quad \times$$

Ejemplo 18. Resolver el siguiente ejercicio combinado:

$$2\sqrt{25} - \sqrt[4]{16} + 3\sqrt[5]{32} - \sqrt[3]{-8}.$$

Solución:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{25} - \sqrt[4]{16} + 3\sqrt[5]{32} - \sqrt[3]{-8} &= 2 \cdot 5 - 2 + 3 \cdot 2 - (-2) \\ &= 10 - 2 + 6 + 2 = 16. \end{aligned}$$

En el ejemplo anterior hemos tenido en cuenta la jerarquía de las operaciones (es decir, el orden en que deben resolverse), lo que recuerda la conocida frase "las sumas y restas separan términos". Esto significa que primero se resuelven las operaciones dentro de un mismo término, y por último se realizan las sumas y las restas:

$$4 + 10 : 2 \neq 14 : 2 = 7 \quad \times \qquad 4 + 10 : 2 = \overbrace{4} + \overbrace{10 : 2} = 4 + 5 = 9. \quad \checkmark$$

Como es sabido, los paréntesis, corchetes y llaves imponen su orden en las operaciones.

Potencia con exponente racional: La definición de raíz con índice natural nos permite extender la definición de potencia al caso de exponente *racional*. Es decir, veremos ahora el significado de, por ejemplo, $x^{\frac{4}{5}}$ o $x^{-\frac{3}{7}}$. Sean $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $\frac{m}{n}$ es irreducible, y sea $x \in \mathbb{R}$. Se define

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}.$$

en caso de que sea posible. Lo ilustramos a continuación.

Ejemplo 19. **Exponentes racionales.**

- $2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16}$ *
- $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

*Luego de ver las propiedades de la potencia y raíz simplificaremos esta expresión.

- $5^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5^{-1}} = \sqrt[3]{\frac{1}{5}}$
- $(-27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-27} = -3$
- $(-27)^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{(-27)^{-1}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = -\frac{1}{3}$
- $(-2)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{(-2)^2} = \sqrt[5]{4}$
- $(-4)^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{(-4)^5} = \sqrt[6]{-1024}$ ⇝ no existe en $\mathbb{R}$ por ser índice par y radicando negativo. ⟪

El ejemplo anterior, junto a lo que ya conocemos sobre radicación, nos conduce a las 3 posibilidades siguientes para $x^{\frac{m}{n}}$ cuando la base x es *negativa*:

- m par, n impar. Es un número positivo (pues x^m es positivo). ✔
- m impar, n impar. Es un número negativo (pues x^m es negativo). ✔
- m impar, n par. No tiene solución en $\mathbb{R}$ (pues x^m es negativo). ✗

Notar que la opción m y n ambos pares se descarta en la lista anterior pues en tal caso la fracción $\frac{m}{n}$ no estaría en su forma irreducible. Concluimos que **la potencia con base negativa y exponente racional irreducible solamente existe cuando el denominador de dicho exponente es impar.**

No hay que dejar pasar los dos requisitos sutiles pero fundamentales sobre el exponente racional $\frac{m}{n}$ establecidos en la definición de potencia: el primero es que al pedir m entero y n natural, es el numerador m el que se está "llevando el signo" de la fracción. Por ejemplo, si el exponente es $-\frac{3}{4}$, tomamos $m = -3$ y $n = 4$. Esto se debe a que el denominador n pasa a ser el índice de la raíz, la cual definimos solamente para índices naturales. El segundo requisito es que la fracción sea irreducible. En realidad esto no será necesario cuando la base sea positiva, pero como veremos en el ejemplo siguiente, si la base es negativa y el exponente no se encuentra en su mínima expresión, podemos obtener resultados absurdos.

Ejemplo 20. **Se debe reducir el exponente.** Supongamos que queremos calcular $(-2)^{\frac{6}{2}}$ y no observamos que el exponente puede reducirse a 3. Entonces, si aplicamos la definición de potencia con exponente racional sin reducir la fracción, obtenemos

$$(-2)^{\frac{6}{2}} = \sqrt{(-2)^6} = \sqrt{64} = 8.$$

Sin embargo, si observamos que $\frac{6}{2} = 3$, tenemos

$$(-2)^{\frac{6}{2}} = (-2)^3 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -8,$$

obteniendo así un resultado diferente al primero. Este último es el correcto, pues se obtuvo respetando la definición. ⟪

Como se pudo observar, hay que tener cuidado con las bases negativas con exponentes racionales, para no cometer errores que conduzcan a resultados incorrectos. Para evitar estos inconvenientes, será de gran utilidad la siguiente fórmula que relaciona una potencia con base negativa con otra cuya base es positiva, siempre que el exponente sea irreducible y tenga denominador impar (que, como mencionamos antes, es el único caso que importa pues de lo contrario la potencia no existe). Más precisamente, sean m entero y n natural *impar* con $\frac{m}{n}$ irreducible. Para $x > 0$ se tiene que

$$(-x)^{\frac{m}{n}} = (-1)^m x^{\frac{m}{n}}. \tag{2.3.2}$$

La fórmula anterior será una herramienta muy útil para "deshacernos" de las bases negativas.

Ejemplo 21. **Eliminando bases negativas.** Aplicando la fórmula anterior, tenemos que:

$$(-2)^{\frac{4}{5}} = (-1)^4 2^{\frac{4}{5}} = 2^{\frac{4}{5}},$$
$$(-7)^{\frac{5}{3}} = (-1)^5 7^{\frac{5}{3}} = (-1)\cdot 7^{\frac{5}{3}}.$$ «

La definición de potenciación con base positiva y exponente *real* requiere conceptos que escapan al contenido de este libro. Sin embargo, dichos conceptos tienen que ver con "aproximar" el exponente irracional mediante exponentes racionales. Este proceso lo realiza la calculadora al "cortar" la cantidad de decimales de un número irracional en una cantidad finita de ellos. De esta forma, aproxima por ejemplo al irracional π por el racional 3.141592654, y a $\sqrt{2}$ por 1.414213562. En otras palabras, todos los números que uno ingrese en la calculadora se convierten en racionales (muy cercanos al número deseado). Entonces, no resultará para ella un problema calcular 2^π, $4^{\sqrt{3}}$ o $e^{\sqrt{2}}$. Usaremos el resultado arrojado por la calculadora cuando se presenten estos casos. Por ejemplo,

$$2^\pi \approx 8.82497782708.$$

El símbolo $\approx$ indica que el valor no es exacto, sino que hemos redondeado la expresión. Notar que π se encuentra entre 3 y 4, por lo que tiene sentido que 2^π sea un número comprendido entre $2^3 = 8$ y $2^4 = 16$.

Propiedades de la potencia con base positiva. Si x e y son reales *positivos* y $q, r \in \mathbb{R}$, entonces valen las siguientes propiedades:

- **Producto de potencias de igual base:** $x^q \cdot x^r = x^{q+r}$ (los exponentes se suman).
- **División de potencias de igual base:** $x^q : x^r = x^{q-r}$ (los exponentes se restan).

- **Potencia de otra potencia:** $(x^r)^q = x^{rq}$ (los exponentes se multiplican).
- **Distributiva con respecto al producto:** $(x \cdot y)^q = x^q \cdot y^q$.
- **Distributiva con respecto al cociente:** $(x : y)^q = x^q : y^q$.
- **No es distributiva con respecto a la suma ni a la resta:** es decir, no se puede distribuir cuando dentro del paréntesis hay una suma o resta:

  ✗ $(x+y)^q \neq x^q + y^q$,

  ✗ $(x-y)^q \neq x^q - y^q$.

  
- **Cambio de orden:** $x^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$ para todo $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.
- **Invariancia por fracciones equivalentes:** $x^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m\cdot k}{n\cdot k}}$ para todo $m \in \mathbb{Z}$, $n, k \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 22. **Aplicando las propiedades de la potencia.**

- $8^{\frac{5}{3}} \cdot 8^{-\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{5}{3}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 8^2 = 64.$
- $7^{\frac{3}{2}} : 7^{\frac{5}{2}} = 7^{\frac{3}{2}-\frac{5}{2}} = 7^{-1} = \frac{1}{7}.$
- $\left(\left(a^2 \cdot a^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{7}{2}}\right)^{\frac{6}{5}} = \left(\left(a^{\frac{10}{3}}\right)^{\frac{7}{2}}\right)^{\frac{6}{5}} = a^{\left(\frac{10}{3}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{6}{5}\right)} = a^{14}, \qquad a > 0.$
- $(5 \cdot x)^2 = 5^2 \cdot x^2 = 25x^2, \qquad x > 0.$
- $\left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{a^3}{2^3} = \frac{a^3}{8}, \qquad a > 0.$ «

Ejemplo 23. **Cambiando el orden.** Veamos un ejemplo de cómo funciona la propiedad de "cambio de orden". Si aplicamos la definición de potencia para calcular $27^{\frac{2}{3}}$, primero tenemos que elevar al cuadrado y luego sacar la raíz cúbica:

$$27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{729} = 9,$$

pero cambiando el orden de estas operaciones tenemos que

$$27^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 3^2 = 9.$$

Se obtiene así el mismo resultado pero en una forma más sencilla, por involucrar números más pequeños al calcular primero la raíz, y elevar luego al cuadrado. Por otro lado, la última propiedad de las potencias nos dice que el mismo resultado se obtiene si el exponente no es irreducible, debido a que la base es *positiva*:

$$27^{\frac{4}{6}} = \sqrt[6]{27^4} = \sqrt[6]{531441} = 9,$$

como puede comprobarse mediante la calculadora. «

Muchas de las teclas de las calculadoras científicas tienen dos funciones: la que está escrita sobre la tecla que se ejecuta directamente con ella, o la que está escrita por encima de ella (arriba). Para poder usar esta segunda función es necesario oprimir antes la tecla SHIFT o INV. Las calculadoras científicas actuales cuentan con una tecla cuya segunda función aparece como $\sqrt{\square}$ (o $\sqrt[x]{\ }$ en las más antiguas), para calcular la raíz con cualquier índice. Sin embargo, algunas solamente traen teclas para calcular la raíz cuadrada de un número, o la cúbica. En tal caso, se puede pasar la raíz a potencia, y usar la tecla $x^{\square}$ o x^y, según el modelo. Por ejemplo, para calcular $\sqrt[6]{729}$ podemos hacer $729^{\frac{1}{6}}$.

Cabe mencionar que las bases negativas se eliminan en las propiedades anteriores ya que los exponentes racionales pueden llevar a cosas como

$$\sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{(-1)}\cdot\sqrt{(-1)},$$

que surgen tomando $x = y = -1$ y $q = \frac{1}{2}$ en la propiedad distributiva con respecto al producto. En esta igualdad, el lado izquierdo tiene sentido pues es $\sqrt{1}$, mientras que el lado derecho no lo tiene pues no existen ninguno de los factores en el conjunto de los números reales. Además, aún pidiendo que las expresiones tengan sentido, algunas propiedades no valen para bases negativas, como la "potencia de otra potencia". El ejemplo siguiente* muestra que si la aplicamos en dicho caso, podemos llegar a algo absurdo.

Ejemplo 24. **Cuidado con las bases negativas.**

$$\begin{aligned} -27 &= (-27)^1 = (-27)^{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}} \\ &= \left((-27)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt[3]{(-27)^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt[3]{729}\right)^{\frac{3}{2}} \\ &= 9^{\frac{3}{2}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} = 3^3 = 27. \end{aligned}$$

Siguiendo la cadena de igualdades anterior, se obtiene $-27 = 27$, lo cual es absurdo. «

Sin embargo, si los exponentes fueran **enteros** entonces las propiedades siguen valiendo para bases **negativas**. Además, para exponentes racionales con denominador impar, se puede usar la fórmula (2.3.2) para pasar de bases negativas a positivas, y luego aplicar la propiedades. Hacer uso de esta combinación será una herramienta muy útil, como se ilustra en los siguientes ejemplos.

*Fuente: `https://en.wikipedia.org/wiki/Exponentiation`. Consultado en agosto de 2018.

Ejemplo 25. **Eliminando bases negativas para aplicar las propiedades.** Aplicando (2.3.2), se obtiene:

$$\begin{aligned}(-8)^{\frac{1}{5}}\cdot\left(4^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{4}{5}} &= (-1)^1\cdot 8^{\frac{1}{5}}\cdot 4^{\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{5}\right)}\\ &= (-1)\cdot\left(2^3\right)^{\frac{1}{5}}\cdot\left(2^2\right)^{\frac{6}{5}} = (-1)\cdot 2^{\frac{3}{5}}\cdot 2^{\frac{12}{5}}\\ &= (-1)\cdot 2^{\frac{15}{5}} = (-1)\cdot 2^3 = -8.\end{aligned}$$

«

Ejemplo 26. Calcular $(-8)^{\frac{2}{3}}$ utilizando la fórmula (2.3.2) y la propiedad de cambio de orden.

Solución:

$$(-8)^{\frac{2}{3}} = (-1)^2 8^{\frac{2}{3}} = 1\cdot\left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4.$$

«

En cuanto a las **propiedades de la radicación**, puesto que $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, estas son inmediatas a partir de las propiedades de la potencia.

Propiedades de la radicación. Si n y m son naturales, y x e y son reales *positivos*, entonces valen las siguientes propiedades:

- **Distributiva con respecto al producto:** $\sqrt[n]{x\cdot y} = \sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y}$.
- **Distributiva con respecto al cociente:** $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$.
- **Raíz de otra raíz:** $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m\cdot n]{x}$ (los índices se multiplican).
- **No es distributiva con respecto a la suma ni a la resta:** es decir, no se puede distribuir cuando el radicando es una suma o resta:

  ✗ $\sqrt[n]{x+y} \neq \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}$,

  ✗ $\sqrt[n]{x-y} \neq \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y}$.

- **¡Cuidado al sumar o restar $\frac{1}{n}$ y $\frac{1}{m}$!**

  ✗ $\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[m]{x} \neq \sqrt[n+m]{x}$ pues $\frac{1}{n}+\frac{1}{m} \neq n+m$,

  ✗ $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[m]{x}} \neq \sqrt[n-m]{x}$ pues $\frac{1}{n}-\frac{1}{m} \neq n-m$.

- Si n es impar, $\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$.
- $\sqrt[n]{x^n} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$ ⇝ es decir, son operaciones inversas cuando $x > 0$ (o $x = 0$). Si x fuera *negativo* vale lo mismo para n *impar*, pero hay que tener cuidado para n par, y dicho caso se analiza en detalle en (2.3.3), en la Sección 2.3.4.

Ejemplo 27. **Aplicando las propiedades de la radicación.**

- $\sqrt{\frac{5}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$.
- $\sqrt[3]{\sqrt{20}} = \sqrt[6]{20}$.
- $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt{7} = 7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{2}} = 7^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{7^5} = \sqrt[6]{16807}$ (notar que el resultado no es $\sqrt[5]{7}$, que es lo que se obtendría erróneamente al sumar los índices).
- $\sqrt[8]{3^8} = \left(\sqrt[8]{3}\right)^8 = 3$, y $\sqrt[7]{(-3)^7} = -3$. Sin embargo $\sqrt[8]{(-3)^8} \neq -3$, como se verá en (2.3.3). «

Ejemplo 28. **Simplificando radicales.** Veamos cómo usar la propiedad distributiva de la raíz para simplificar expresiones:

$$\sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^3}\sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2},$$

$$\sqrt[4]{5^{11}} = \sqrt[4]{5^8 \cdot 5^3} = \sqrt[4]{5^8}\sqrt[4]{5^3} = 5^{\frac{8}{4}}\sqrt[4]{125} = 5^2\sqrt[4]{125} = 25\sqrt[4]{125}.$$ «

El procedimiento utilizado en el ejemplo anterior se puede generalizar de la siguiente manera: sean m y n naturales con $m > n$, y sea x un real positivo. Sean q y r naturales tales que $m = n \cdot q + r$ (es decir, hacemos la división $m : n$ y llamamos q al cociente y r al resto). Entonces

$$\sqrt[n]{x^m} = x^q \sqrt[n]{x^r}.$$

Esta igualdad se obtiene mediante el mismo razonamiento empleado en el ejemplo, el cual suele ser más sencillo de aplicar que memorizar la fórmula resultante.

Ejemplo 29. Simplificar $\sqrt{\frac{243}{125}}$.

Solución: Primero hay que factorizar los números involucrados, para luego simplificar exponentes con índices de acuerdo al procedimiento anterior:

$$\sqrt{\frac{243}{125}} = \sqrt{\frac{3^5}{5^3}} = \frac{\sqrt{3^5}}{\sqrt{5^3}} = \frac{\sqrt{3^4 \cdot 3}}{\sqrt{5^2 \cdot 5}} = \frac{\sqrt{3^4} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{5^2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3^2 \cdot \sqrt{3}}{5 \cdot \sqrt{5}} = \frac{9}{5}\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Otra forma de resolverlo es mediante la fórmula de arriba, aplicada por un lado al numerador y por otro al denominador. Para $\sqrt{3^5}$ se aplica con $n = 2$, $m = 5$ y $x = 3$, lo que produce $q = 2$ y $r = 1$ (pues $5 = 2 \cdot 2 + 1$). Luego

$$\sqrt{3^5} = 3^2\sqrt{3}.$$

Para el denominador $\sqrt{5^3}$, la fórmula se aplica con $n = 2$, $m = 3$ y $x = 5$, lo que produce $q = 1$ y $r = 1$. Por lo tanto

$$\sqrt{5^3} = 5\sqrt{5}.$$ «

Diremos que dos o más radicales son **semejantes** si tienen el mismo índice y el mismo radicando. Lo único que pueden tener distinto es el coeficiente que los multiplica. Por ejemplo, los radicales $3\sqrt{2}$ y $-5\sqrt{2}$ son semejantes. Para comprobar si dos radicales son semejantes o no, se simplifican lo más posible, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 30. **Reconociendo radicales semejantes.** Determinar si los radicales $\sqrt[3]{162}$ y $\sqrt[3]{48}$ son semejantes.

Solución: Observemos primero que ambos tienen índice igual a 3. Además, si factorizamos los radicandos obtenemos

$$162 = 2 \cdot 3^4, \qquad 48 = 2^4 \cdot 3.$$

Entonces, por un lado tenemos que

$$\sqrt[3]{162} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^4} = \sqrt[3]{2} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{6},$$

y, por el otro,

$$\sqrt[3]{48} = \sqrt[3]{3 \cdot 2^4} = \sqrt[3]{3} \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{6}.$$

Luego, son radicales semejantes. «

Ejemplo 31. **Combinando radicales.** La propiedad distributiva de la suma y la resta nos permite combinar radicales semejantes. Por ejemplo, si consideramos los radicales del ejemplo anterior tenemos que

$$\sqrt[3]{162} + \sqrt[3]{48} - 9\sqrt[3]{6} = 3\sqrt[3]{6} + 2\sqrt[3]{6} - 9\sqrt[3]{6} = (3 + 2 - 9)\sqrt[3]{6} = -4\sqrt[3]{6}. \quad «$$

Consideremos las dos fracciones siguientes:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{y} \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Sabiendo que $\sqrt{2} \approx 1.4142$, para obtener un valor numérico aproximado de las fracciones anteriores, debemos hacer la división $1 : (1.4142)$ para la primera, mientras que para la segunda debemos resolver $(1.4142) : 2$. Sin una calculadora, la última es más sencilla de resolver que la primera, ya que dividir por 2 es tomar la mitad del número, lo cual es aproximadamente 0.7. Resulta que estas dos fracciones son equivalentes, y la segunda puede obtenerse a partir de la primera mediante un procedimiento denominado **racionalización del denominador**. El mismo consiste en eliminar los radicales que aparecen en el denominador, multiplicando y dividiendo la fracción dada por un mismo valor, elegido convenientemente. Ilustramos el método en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 32. **Racionalización de denominadores.** Notar que:

$$\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

☞ En forma general, si en el denominador aparece $\sqrt{x}$ con $x > 0$, multiplicamos y dividimos por $\sqrt{x}$ para convertir en x al denominador.

Analicemos ahora el siguiente caso, en el que supondremos que los símbolos denotan cantidades positivas:

$$\frac{1}{\sqrt[5]{16a^2b^3c}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2^4a^2b^3c}}\frac{\sqrt[5]{2a^3b^2c^4}}{\sqrt[5]{2a^3b^2c^4}} = \frac{\sqrt[5]{2a^3b^2c^4}}{2abc}.$$

☞ Es decir, multiplicamos y dividimos por una raíz con igual índice, pero los exponentes de cada factor corresponden a lo que le "falta" a cada uno para llegar a 5, que es el índice del radical en este caso. En forma general, por cada factor de la forma $\sqrt[m]{x^n}$ en el denominador, con $n < m$ y $x > 0$, multiplicamos y dividimos por $\sqrt[m]{x^{m-n}}$. «

Antes de pasar a la última operación del capítulo conviene que hagamos un resumen de cuándo es posible aplicar, sin miedo a cometer errores, las propiedades de las potencias (y por lo tanto de la raíz ya que $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$), y cuándo hay que tener cuidado y aplicar primero la fórmula (2.3.2):

- Base positiva, cualquier tipo de exponente. ✔
- Base negativa y exponente entero. ✔
- Base negativa y exponente racional. ⚠

Logaritmo. Al igual que la radicación con índice natural, el logaritmo se define por medio de la potencia. El logaritmo en base a de un número x se denota como

$$\log_a x \longleftarrow \text{argumento}$$
$$\uparrow$$
$$\text{base}$$

y lo que buscamos ahora es un exponente b al cual elevar la base a para obtener el argumento x. Es decir, dados dos números reales positivos a y x, con $a \neq 1$, el logaritmo de x en base a es un número real b tal que $a^b = x$. En símbolos:

$$\log_a x = b \text{ si y solo si } a^b = x.$$

NO CORRESPONDE

En lo anterior, el lado izquierdo $\log_a x = b$ se llama **expresión logarítmica**, mientras que el derecho $a^b = x$ se llama **expresión exponencial**.

Solamente se permiten bases positivas (distintas de 1), por lo que x también deberá ser positivo. El exponente b puede ser negativo.

Ejemplo 33. **Hallando logaritmos.**

- $\log_2 32 = 5$, porque $2^5 = 32$.
- $\log_{\frac{1}{2}} 32 = -5$, porque $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 2^5 = 32$.
- $\log_7 49 = 2$, porque $7^2 = 49$.
- $\log_{27} 9 = \frac{2}{3}$, porque $27^{\frac{2}{3}} = 9$.
- $\log_a 1 = 0$, porque $a^0 = 1$.
- $\log_a a = 1$, porque $a^1 = a$.

«

Ejemplo 34. **Dos logaritmos especiales.** Existen dos bases que son especiales para los logaritmos: tienen notación propia, nombre y hasta una tecla especial en la calculadora. La primera es la base $a = 10$. En este caso el logaritmo se llama **decimal** y se denota simplemente como $\log x$ (es decir, no se escribe $\log_{10} x$ sino que la base se omite). Por ejemplo,

$$\log 1000 = 3, \quad \text{porque} \quad 10^3 = 1000.$$

Otro logaritmo especial es el llamado logaritmo **neperiano** o **natural**, y es el que tiene como base al número irracional $e = 2.71828\ldots$ El número e, y por lo tanto el logaritmo que lo tiene como base, es muy importante en la matemática y en otras ciencias, como se verá en capítulos posteriores. Para indicar el logaritmo natural de un número positivo x, escribimos $\ln x$.

 Las calculadoras científicas tienen teclas para calcular estos dos logaritmos, identificadas como log y ln, respectivamente. Con estas teclas podemos por ejemplo obtener:

$$\log 42 \approx 1.623, \qquad \ln 6 \approx 1.792, \qquad \log 0.5 \approx -0.301, \qquad \ln 0.5 \approx -0.693.$$

Cualquiera de las cantidades anteriores puede verificarse mediante la definición. Por ejemplo, para verificar la primera hacemos $10^{1.623}$, que nos da aproximadamente 41.98. Obviamente no se obtiene exactamente 42, pues se produce un error debido al redondeo. «

En el siguiente ejemplo veremos cómo resolver el problema inverso: conociendo el logaritmo de un número, cómo hallar dicho número. Esto se logra aplicando la definición de logaritmo.

Ejemplo 35. **El problema inverso.** Supongamos que sabemos que $\log_2 x = 5$ y queremos hallar x. Entonces aplicamos la definición de logaritmo:

$$\log_2 x = 5 \text{ si y solo si } 2^5 = x.$$

Luego, el número buscado es $x = 2^5 = 32$. «

 En el ejemplo anterior no necesitamos calculadora porque los números eran sencillos, pero en otros casos puede ser que sí la necesitemos. Por ejemplo, supongamos que buscamos el número x que satisface $\ln x = 0.3$. Esto ocurre si $e^{0.3} = x$, y empleando la calculadora se obtiene $x \approx 1.35$. Para ello hemos utilizado la tecla cuya segunda función aparece como $\boxed{e^{\blacksquare}}$ o $\boxed{e^x}$, según el modelo. También está la tecla con segunda función correspondiente a $\boxed{10^{\blacksquare}}$ o $\boxed{10^x}$, que nos permite por ejemplo hallar x sabiendo que $\log x = -1.3$. Es decir que $x = 10^{-1.3} \approx 0.05$.

También puede ocurrir que, conociendo el resultado del logaritmo y el número x, el problema sea hallar la base, como ilustramos a continuación.

Ejemplo 36. **En busca de la base.** ¿Cuál es la base a tal que $\log_a 25 = 2$? Por la definición de logaritmo sabemos que

$$\log_a 25 = 2 \text{ si y solo si } a^2 = 25.$$

Es decir, buscamos un número *positivo* a tal que elevado al cuadrado se obtenga 25. Es fácil deducir que a es 5. «

De las propiedades de la potencia se deducen las siguientes **propiedades del logaritmo**.

 **Propiedades del logaritmo.** Si a, x e y son reales positivos con $a \neq 1$, entonces vale lo siguiente:

- **Logaritmo de un producto:** $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$.
- **Logaritmo de un cociente:** $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.
- **Logaritmo de una potencia:** $\log_a (x^q) = q \log_a x$, para todo $q \in \mathbb{R}$.
- $\left.\begin{array}{l} \log_a (a^q) = q \\ a^{\log_a x} = x \end{array}\right\} \rightsquigarrow$ es decir, son operaciones inversas.
- $\log_a x = \log_a y$ si y solo si $x = y$.
- **Fórmula de cambio de base:** $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$, para todo $b > 0$, $b \neq 1$.

Ejemplo 37. **Aplicando las propiedades del logaritmo.** Usar las propiedades anteriores para expresar lo siguiente en términos de un único logaritmo:

$$\log_6 x + 4\log_6 y - \log_6 z, \qquad x,\, y,\, z > 0.$$

Solución: Aplicamos las propiedades del producto, la potencia y el cociente, para obtener

$$\begin{aligned}\log_6 x + 4\log_6 y - \log_6 z &= \log_6 x + \log_6\left(y^4\right) - \log_6 z \\ &= \log_6\left(x \cdot y^4\right) - \log_6 z \\ &= \log_6\left(\frac{x \cdot y^4}{z}\right).\end{aligned}$$

«

Ejemplo 38. **La calculadora y la fórmula de cambio de base.** La mayoría de las calculadoras científicas nuevas disponen de una tecla  para hallar el logaritmo de un número en cualquier base. Sin embargo, algunas calculadoras solamente cuentan con las teclas para calcular logaritmo decimal y neperiano. En ese caso, la fórmula de cambio de base nos permite calcular el logaritmo en cualquier base a mediante las fórmulas:

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}, \qquad \text{o bien} \qquad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Por ejemplo,

$$\log_5 81 = \frac{\log 81}{\log 5} = \frac{\ln 81}{\ln 5} \approx 2.73,$$

lo cual podemos verificar haciendo $5^{2.73} \approx 80.94$. «

La propiedad del producto de logaritmos dice que "el logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos", que no significa que "el logaritmo de una suma sea igual al producto de los logaritmos". Es decir,

$$\log_a(x+y) \neq \log_a x \cdot \log_a y.$$

Lo mismo vale para la resta, es decir,

$$\log_a(x-y) \neq \frac{\log_a x}{\log_a y}.$$

Este es un error muy frecuente, por lo que hay que tener cuidado de no cometerlo. Todas las propiedades estudiadas hasta ahora serán fundamentales para lograr resolver ecuaciones en capítulos posteriores.

Ejercicios 2.3.1

Para los ejercicios de esta sección, supondremos que las letras representan siempre números positivos.

1. Hallar el resultado que se obtiene al realizar las siguientes operaciones combinadas:

(a) $2+3\cdot 4-((-3)\cdot 2+4-3\cdot 5)$

(b) $4(3-5)-3^2 2^3+7\sqrt{25}$

(c) $\frac{3+4\cdot 3}{3}-5\left(4-6\cdot 3-\sqrt[3]{27}\right)$

(d) $\log_2 32+\left(5^{-1}\right)^{-2}+\sqrt[3]{\sqrt{4^6}}-(-3)$

(e) $\frac{10\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{5^2}}$

(f) $\sqrt{112}-2\sqrt{63}+\frac{3}{5}\sqrt{175}$

(g) $\sqrt[6]{4^5}:\sqrt[6]{9^3}$

(h) $\frac{1}{2^{-3}}-\left(\log_3\left(27^{-1}\right)\right)^4$

(i) $\frac{2^3-\log_5\left(5^{-2}\right)}{\sqrt{5^4}}$

2. Simplificar las siguientes expresiones:

(a) $x^2y^{-2}x^{-\frac{1}{3}}\frac{1}{y^4}(y^2)^{\frac{1}{2}}$

(b) $\frac{x^{-3}y^3x^4}{x^{-2}x^5y^3}$

(c) $\sqrt{a^3}a^{-\frac{2}{5}}\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^4}}\,a^{-1}$

(d) $\frac{a^2b^{-\frac{5}{4}}c^3}{b^{-2}c^4a}$

(e) $\sqrt{a^2a}+2\sqrt{a^{-8}a^{15}}-3\sqrt{a^{-\frac{1}{2}}a^{\frac{3}{2}}}$

3. Racionalizar los denominadores y simplificar cuando sea posible:

(a) $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$

(b) $\frac{3}{\sqrt[5]{3^4}}$

(c) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2b}}$

(d) $\frac{a^2bc^3}{\sqrt[6]{a^3b^4c^5}}$

4. Aplicar las propiedades para reescribir cada expresión en términos de un único logaritmo:

(a) $4\ln x + \frac{1}{4}\ln(x+3)$

(b) $5\log x + 2\log y - 3\log z$

(c) $\log_2\left(a^3\right) + \log_2 4 - 5\log_2 x$

(d) $5\log_a(x+1) + 2\log_a\left(x^3\right) - \log_a x$

5. ⚠ El objetivo de este ejercicio es evitar cometer los siguientes **errores***, que son tan graves como frecuentes. Hallar ejemplos que prueben que:

(a) $\frac{n}{m} + \frac{p}{q} \neq \frac{n+p}{m+q}$

(b) $\frac{\not{n}+p}{\not{n}} \neq p$

(c) $\frac{n}{m+q} \neq \frac{n}{m} + \frac{n}{q}$

(d) $\frac{1}{m} + \frac{1}{q} \neq \frac{1}{m+q}$

(e) $a^n \cdot a^m \neq a^{n\cdot m}$

(f) $\frac{a^n}{a^m} \neq a^{\frac{n}{m}}$

(g) $(x+y)^2 \neq x^2 + y^2$

(h) $\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$

(i) $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[m]{x} \neq \sqrt[n+m]{x}$

(j) $\log(x+y) \neq \log x + \log y$

(k) $\log(x+y) \neq \log x \cdot \log y$

(l) $\frac{\log x}{\log y} \neq \log \frac{x}{y}$

(m) $(\log x)^n \neq n \log x$

6. 🐾 **La dosis para el gato.** Natalia llevó a su gato al veterinario porque se encontraba enfermo. Para su cura, le recetó un medicamento cuya dosis en miligramos depende del peso en kilos (x) y de la edad en semanas (y) del gato. La dosis diaria que debe administrarle del medicamento se calcula como $x^2 + y^2$, siendo letal si se le administra una cantidad mayor. Natalia realizó el cálculo y concluyó que a su gato de 36 semanas y 4 kg de peso, debía darle una dosis diaria de 1600 miligramos. Por fortuna, una amiga le advirtió que había cometido un error en ese cálculo, el cual podría haber producido una muerte por sobredosis. ¿Cuál fue el error que cometió Natalia en el cálculo?

7. Calcular $(-2)^4$ y -2^4. Comparar los resultados.

8. Calcular $(-2)^3$ y -2^3. Comparar los resultados. Establecer la diferencia con respecto al ejercicio anterior.

*Se enuncian para la suma, pero tampoco son válidas para la resta.

9. Determinar el error en el siguiente razonamiento (indicar cuál/es igualdades son incorrectas):

$$-1 \overset{(a)}{=} (-1)^{\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{4}} \overset{(b)}{=} \left((-1)^{\frac{4}{5}}\right)^{\frac{5}{4}} \overset{(c)}{=} \left(\sqrt[5]{(-1)^4}\right)^{\frac{5}{4}} \overset{(d)}{=} \left(\sqrt[5]{1}\right)^{\frac{5}{4}} \overset{(e)}{=} (1)^{\frac{5}{4}} \overset{(f)}{=} 1.$$

10. Determinar cuál de los dos razonamientos es el correcto y justificar:

$$(-2)^{\frac{10}{2}} = \sqrt{(-2)^{10}} = \sqrt{1024} = 32;$$

$$(-2)^{\frac{10}{2}} = (-2)^5 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = -32.$$

2.3.2. Notación científica

La **notación científica**, también conocida como notación en forma exponencial, es una manera "compacta" de escribir números demasiado grandes o demasiado pequeños, los cuales son frecuentes en muchos campos de la ciencia. Por ejemplo, tenemos los siguientes valores aproximados:

- Masa de la Luna: 74000000000000000000 toneladas.
- Distancia de la Tierra al Sol: 150000000 km.
- Masa de un protón: $0.00000000000000000000000000016726$ kg.

En dichos números, muy grandes o muy pequeños, hay una gran cantidad de ceros, ya sea a la derecha o a la izquierda. Estos ceros pueden representarse como potencias enteras de 10, por ejemplo:

$$10^5 = 100000, \qquad 10^{-4} = \frac{1}{10^4} = 0.0001.$$

En forma general, si n es un número natural entonces

$$10^n = \underbrace{10\cdots00}_{\text{Un 1 y } n \text{ ceros}}, \qquad 10^{-n} = 0.\underbrace{00\cdots001}_{n-1 \text{ ceros y un 1}}.$$

Entonces, multiplicar un número por 10^n desplaza el separador de decimales (en este caso el punto) n lugares hacia la derecha, mientras que multiplicar por 10^{-n} lo desplaza n lugares hacia la izquierda:

$$2.5 \times 10^7 = \underbrace{25000000.}_{\text{7 lugares}}, \qquad 2.5 \times 10^{-4} = \underbrace{0.00025}_{\text{4 lugares}}.$$

Lo que hicimos fue precisamente expresar un número muy grande y uno muy pequeño en notación científica. Formalmente, se dice que un número positivo x está escrito en **notación científica** si está expresado en la forma

$$m \times 10^n,$$

siendo n un entero y m un número racional tal que $1 \leq m < 10$. El exponente n es llamado **orden de magnitud**.

NO CORRESPONDE

Ejemplo 39. **Utilizando notación científica.**

- Masa de la Luna: 7.4×10^{19} toneladas.
- Distancia de la Tierra al Sol: 1.5×10^{8} km.
- Masa de un protón: 1.6726×10^{-27} kg. «

Las calculadoras también utilizan notación científica para expresar números muy grandes o muy chicos. La forma de indicarlo depende del modelo de la calculadora, pero las posibles opciones de salida para, por ejemplo, 6.8954×10^{15} son las siguientes:

`6.8954×10^15`, `6.8954 15`, `6.8954E15`.

Recíprocamente, para ingresar en la calculadora un número en notación científica, se utilizan la tecla $\boxed{\times 10^{x}}$ en las más modernas, o la indicada como $\boxed{\text{EXP}}$ en las más antiguas, muchas veces ubicadas a la izquierda de la tecla $\boxed{\text{Ans}}$.

Ejercicios 2.3.2

1–4. Expresar en notación científica las cantidades dadas.

1. 2650000000000000000 metros.

2. 0.000000000000000000000015 kilogramos.

3. 10204000000000000000000000000 litros.

4. 0.000000000000000000000000102 gramos.

5–9. Escribir cada número dado en notación decimal.

5. 3.5674×10^{9}

6. 1.23×10^{-8}

7. 6.4×10^{5}

8. 8.2×10^{-6}

2.3.3. Orden en los números reales

En el conjunto $\mathbb{R}$ tenemos definida una **relación de orden** que denotamos como antes con el símbolo $<$ (menor). En términos no formales decimos que $a < b$ (o $b > a$) si al ubicar ambos puntos en la recta numérica, a queda a la izquierda de b. Como antes, $a \leq b$ significa $a < b$ o $a = b$. Esta relación de orden satisface las propiedades enunciadas a continuación:

NO CORRESPONDE

- **Tricotomía:** dados dos números reales a y b, entonces se cumple una y solo una de las siguientes opciones:

$$a < b, \qquad a = b, \qquad b < a.$$

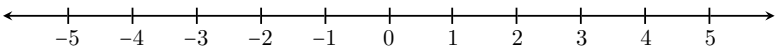
- **Transitiva:** si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

Las operaciones estudiadas previamente producen un efecto en el orden entre dos números reales: algunas lo mantienen, otras lo invierten. En cualquiera de estos casos, esto se conoce como **monotonía** de la operación, y enunciamos el efecto de cada una a continuación:

- **Suma (o resta):** si $a < b$, entonces $a + c < b + c$ para todo número real c.
- **Producto (o cociente):** si $a < b$, entonces $ac < bc$ cuando $c > 0$, pero $ac > bc$ cuando $c < 0$.
- **Potencia (o radicación):** si $q > 0$ y $0 < x < y$ entonces $x^q < y^q$.
- **Logaritmo:** si $0 < x < y$, entonces $\log_a x < \log_a y$ cuando $a > 1$, pero $\log_a x > \log_a y$ cuando $0 < a < 1$.

La monotonía del producto dice que multiplicar ambos lados de una desigualdad por un número positivo, no cambia el sentido de la misma. Sin embargo, si multiplicamos por un número negativo, la misma se invierte. Algo similar ocurre con el logaritmo, el cual preserva el orden cuando la base es mayor que uno, pero lo invierte en caso contrario.

El conjunto de todos los números reales puede representarse gráficamente como una recta numérica, como se indica a continuación:



Existe una forma simple de expresar el conjunto de los números *reales* que satisfacen una desigualdad doble o simple, y es mediante **intervalos**. Por ejemplo, si a y b son dos números reales con $a < b$, el conjunto

$$J = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

puede escribirse de manera más simple mediante el **intervalo abierto** (a, b), que representa la parte de la recta comprendida entre a y b, como lo indica el siguiente gráfico:



Si las desigualdades no fueran estrictas, es decir, si se incluyeran los extremos a y b, entonces el conjunto resultante se llama **intervalo cerrado** $[a, b]$:

$$F = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} = [a, b],$$

cuya representación gráfica es



Si se incluye solamente uno de los dos extremos, el conjunto resultante se llama **intervalo semiabierto** y se denota como $(a, b]$ si incluye a b pero no a a, y como $[a, b)$ en el caso inverso. Ilustramos ambas posibilidades a continuación:





Finalmente, podemos tener conjuntos de la forma

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : x > a\},$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}, \qquad D = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\},$$

en los que solamente hay una desigualdad. El conjunto A se escribe en forma de intervalo como $(-\infty, a)$, y B como (a, ∞)*. Ambos determinan **semirrectas abiertas** en la recta numérica. El símbolo ∞ se lee infinito y *no* representa un número. Similarmente, el conjunto C se escribe como $(-\infty, a]$, D como $[a, \infty)$, y determinan **semirrectas cerradas**. En el siguiente gráfico ilustramos los conjuntos B y C:





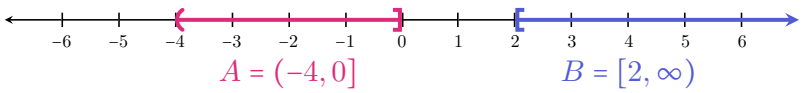
Resumiendo, utilizamos corchete para indicar que el extremo del intervalo está incluido, y en caso contrario usamos paréntesis. Una forma alternativa de representar estas situaciones en la recta real es utilizando un círculo "lleno" en

*Aunque, al igual que con los números reales, el signo + colocado delante es redundante, a veces suele escribirse $(a, +\infty)$ para indicar este conjunto. Similarmente, suele escribirse también $[a, +\infty)$ para indicar el conjunto $[a, \infty)$.

lugar de corchete, o uno "vacío" en lugar de paréntesis, como puede encontrarse en otros textos. Puesto que los símbolos ∞ y $-\infty$ no representan números reales, siempre deben ir acompañados con paréntesis, y nunca con corchete. Así, otra forma de denotar al conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales es mediante el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Ejemplo 40. **Representación gráfica de intervalos.** En el primer gráfico representaremos los conjuntos

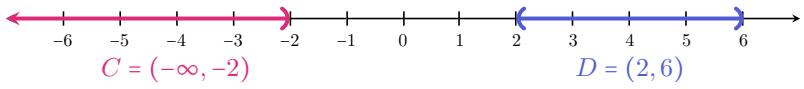
$$A = \{x \in \mathbb{R} : -4 < x \leq 0\} \qquad \text{y} \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}.$$



Por otro lado, los conjuntos

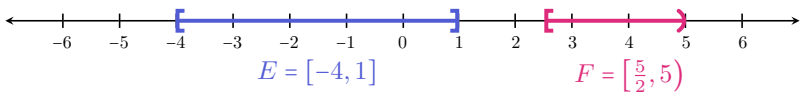
$$C = \{x \in \mathbb{R} : x < -2\} \qquad \text{y} \qquad D = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x < 6\}$$

se representan gráficamente como:



Finalmente, representaremos gráficamente los conjuntos

$$E = \{x \in \mathbb{R} : -4 \leq x \leq 1\} \qquad \text{y} \qquad F = \left\{x \in \mathbb{R} : \tfrac{5}{2} \leq x < 5\right\}.$$



«

☞ En capítulos posteriores, será fundamental comprender el resultado de la unión y la intersección de intervalos. Para ejercitar esto, se recomienda en particular la resolución del Ejercicio 4 de la lista siguiente.

Ejercicios 2.3.3

1. Completar con el signo menor ($<$) o mayor ($>$) según corresponda:

(a) $5 \quad 8$, entonces $5-2 \quad 8-2$.

(b) $5 \quad 8$, entonces $5\cdot(-2) \quad 8\cdot(-2)$.

(c) $2 \quad (-3)$, entonces $2\cdot 4 \quad (-3)\cdot 4$.

(d) $(-4) \quad (-3)$, entonces $(-4)\cdot(-2) \quad (-3)\cdot(-2)$.

(e) $5 \quad 3$, entonces $5^{\frac{1}{2}} \quad 3^{\frac{1}{2}}$.

(f) $4 \quad 6$, entonces $4^3 \quad 6^3$.

(g) $4 \quad 6$, entonces $\log_3 4 \quad \log_3 6$.

(h) $4 \quad 6$, entonces $\log_{\frac{1}{3}} 4 \quad \log_{\frac{1}{3}} 6$.

2. Escribir en forma de intervalo los siguientes conjuntos y representarlos en la recta numérica:

$$A=\{x\in\mathbb{R}: -2\le x<3\}, \qquad B=\{x\in\mathbb{R}: x>4\},$$
$$C=\{x\in\mathbb{R}: 0<x\le 4\}, \qquad D=\{x\in\mathbb{R}: x\le -2\}.$$

3. Utilizar desigualdades para expresar los siguientes intervalos, y representarlos en la recta numérica:

$$(2,5), \quad [2,\infty), \quad [-2,1), \quad (-\infty,0), \quad (-6,-3].$$

4. Hallar y representar gráficamente la unión y la intersección de los siguientes pares de intervalos:

(a) $(-2,3)$ y $[0,5]$.

(b) $[3,8)$ y $[8,11]$.

(c) $(-3,2]$ y $[2,6)$.

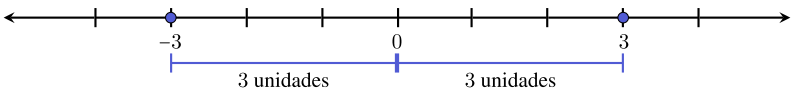
2.3.4. Valor absoluto

El **valor absoluto** de un número real x se indica con $|x|$ y se define como

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{si } x\ge 0;\\ -x, & \text{si } x<0.\end{cases}$$

Es decir, si un número x es positivo o cero, su valor absoluto es igual a él, pero si el número x es negativo, entonces su valor absoluto es el opuesto de x, el cual ahora es positivo. Por lo tanto el valor absoluto de un número es siempre positivo o cero, pero **nunca negativo**. Por ejemplo, $|3|=3$ mientras que $|-5|=5$.

Haremos ahora una **interpretación geométrica** del valor absoluto. Para ello, observemos que $|3| = |-3| = 3$. Si ubicamos el 3 y el -3 en la recta numérica, observamos que ambos se encuentran a 3 unidades de distancia del cero, el primero hacia la derecha y el segundo hacia la izquierda.



Geométricamente, $|x|$ representa la distancia del número x al cero.

Consideremos ahora dos números reales x e y. Nos preguntamos si la cantidad $|x-y|$ nos da alguna información sobre dichos números. Analicemos para ello los siguientes casos:

- si $x = 5$, $y = 2$, $|x-y| = |5-2| = 3$;
- si $x = 2$, $y = 5$, $|x-y| = |2-5| = |-3| = 3$;
- si $x = 5$, $y = -2$, $|x-y| = |5-(-2)| = |5+2| = 7$;
- si $x = -5$, $y = -2$, $|x-y| = |-5-(-2)| = |-5+2| = |-3| = 3$;
- si $x = -5$, $y = 2$, $|x-y| = |-5-2| = |-7| = 7$.

Si graficamos en la recta numérica los casos anteriores, podemos comprobar lo siguiente:

Geométricamente, $|x-y|$ representa la distancia entre los números x e y.

Observar que $|x+y| = |x-(-y)|$, lo que junto a lo anterior implica que $|x+y|$ representa la distancia entre x y $-y$ (el opuesto de y).

Es aquí donde debemos detenernos para advertir sobre un error muy frecuente al momento de resolver ejercicios que involucran valor absoluto. En el siguiente ejemplo, incluiremos la forma correcta de resolverlos, así como dicho error habitual.

Ejemplo 41. **Comprendiendo la definición de valor absoluto.** Utilizar la definición para expresar $|2x-5|$.

Solución: Aplicando directamente la misma, tenemos que

$$|2x-5| = \begin{cases} 2x-5, & \text{si } 2x-5 \geq 0; \\ -2x+5, & \text{si } 2x-5 < 0. \end{cases}$$

NO CORRESPONDE

y cuando $x = 3$ tenemos

$$5|7 - 3x| + 2 = 5|7 - 3 \cdot 3| + 2 = 5|7 - 9| + 2 = 5 \cdot |-2| + 2 = 5 \cdot 2 + 2 = 12. \quad \ll$$

A continuación enumeramos algunas de las **propiedades** del valor absoluto.

Propiedades del valor absoluto. Si x e y son números reales cualesquiera, entonces vale lo siguiente:

(a) $|x| \geq 0$;
(b) $|x| = 0$ si y solo si $x = 0$;
(c) $|-x| = |x|$;
(d) $|xy| = |x||y|$;
(e) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (desigualdad triangular);
(f) Si $a \geq 0$ se tiene que $|x| \leq a$ si y solo si $-a \leq x \leq a$ (análogamente con $<$);
(g) Si $a \geq 0$ se tiene que $|x| \geq a$ si y solo si $x \geq a$ o $x \leq -a$ (análogamente con $>$).

¿Qué nos dicen todos los símbolos anteriores? Poder interpretar el lenguaje matemático es fundamental para comprender los conceptos y resultados. La propiedad (**a**) establece que el valor absoluto es siempre positivo o cero, pero nunca negativo, mientras que (**b**) afirma que el único número que dista cero unidades del cero, es el mismo cero.

En (**c**) se establece que cada número dista del cero lo mismo que su opuesto, lo cual es lógico ya que éstos se encuentran hacia lados opuestos en la recta numérica, pero a la misma distancia de él.

La propiedad (**d**) dice que el valor absoluto se distribuye con respecto al producto (y en consecuencia con respecto al cociente). Sin embargo, esto nunca debe hacerse cuando tenemos una suma o resta de dos números, es decir, es fácil encontrar valores para x e y tales que

$$|x - y| \neq |x| - |y|,$$

$$|x + y| \neq |x| + |y|.$$

Para los casos anteriores, lo que vale es la desigualdad triangular (**e**), que junto con (**c**) implican que

$$|x - y| \leq |x| + |y|,$$

pues $|x - y| = |x + (-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|$.

Finalmente, las propiedades (**f**) y (**g**) nos indican, respectivamente, cuáles son los números que se encuentran "cerca" del cero (en el sentido que están a

OPCIONAL

una distancia menor o igual que a), y cuáles se encuentran "lejos" de él (por encontrarse a una distancia mayor o igual que a). Gráficamente, si a es un número positivo, entonces $|x| \leq a$ indica todos aquellos valores que se encuentren a una distancia menor o igual que a del cero, ya sea hacia la derecha o hacia la izquierda. Esto se representa como el intervalo $[-a, a]$, ilustrado en la Figura 2.1. Análogamente, $|x| < a$ si y solo si $-a < x < a$, lo cual termina de ilustrar la propiedad (**f**).

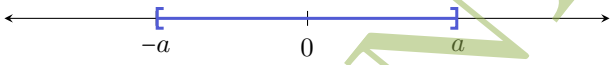


Figura 2.1: $|x| \leq a$ si y solo si $-a \leq x \leq a$.

En cambio, $|x| \geq a$ indica todos aquellos valores que se encuentren a una distancia del cero mayor o igual que a, ya sea hacia la derecha o hacia la izquierda. Esto se representa como la unión de los dos intervalos $(-\infty, a]$ y $[a, \infty)$ que se ilustran en la Figura 2.2. De la misma forma, si la desigualdad es estricta tenemos que $|x| > a$ si y solo si $x > a$ o $x < -a$, lo cual termina de ilustrar la propiedad (**g**).

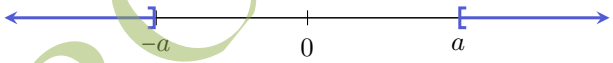


Figura 2.2: $|x| \geq a$ si y solo si $x \geq a$ o $x \leq -a$.

Notar que si en (**f**) tomamos a negativo y buscamos los valores de x tales que $|x| \leq a$, la respuesta sería el conjunto vacío, ya que el valor absoluto nunca puede ser negativo. De la misma forma, si a es negativo en (**g**), entonces la solución a $|x| \geq a$ son todos los números reales, ya que el valor absoluto es siempre positivo o cero.

En el Capítulo 4 retomaremos el concepto de valor absoluto resolviendo ecuaciones e inecuaciones que lo involucren. Allí, comprender su definición y propiedades será una herramienta imprescindible.

Ejemplo 43. **Aplicando las propiedades del valor absoluto.** Reescribir las siguientes desigualdades utilizando las propiedades (**f**) y (**g**) para eliminar el valor absoluto según corresponda:

(i) $|x| < 3$

(ii) $|2 - b| \geq 4$

(iii) $|5y| > 10$

OPCIONAL
NO CORRESPONDE

Solución: Utilizamos la propiedad (**f**) para reescribir (i) como $-3 < x < 3$. Para las dos restantes usaremos la propiedad (**g**): la desigualdad en (ii) es equivalente a las desigualdades

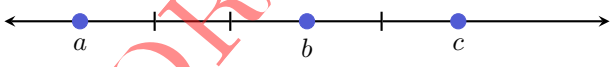
$$2 - b \geq 4 \quad \text{o} \quad 2 - b \leq -4,$$

mientras que lo dado en (iii) equivale a

$$5y > 10 \quad \text{o} \quad 5y < -10.$$ «

Ejemplo 44. Sean a, b y c números reales tales que $|a - b| = 3$ y $|b - c| = 2$. Si además satisfacen que $a < b < c$, encontrar la distancia entre a y c.

Solución: Para resolverlo, resultará útil ubicarlos en la recta numérica. Podemos comenzar ubicando a en cualquier parte, y combinar las hipótesis $a < b$ con $|a - b| = 3$ para concluir que b debe estar a 3 unidades hacia la derecha de a. De la misma forma, de $b < c$ y $|b - c| = 2$ se deduce que c debe estar a 2 unidades hacia la derecha de b, obteniendo así el siguiente gráfico:



Entonces, podemos concluir que la distancia entre a y c es 5. En este caso se cumple que $|a - c| = |a - b| + |b - c| = 3 + 2$, pero esto sucedió gracias a la hipótesis adicional $a < b < c$. Sin esto, lo único que podemos saber gracias a la desigualdad triangular (**e**) es que

$$|a - c| = |a - b + b - c| = |(a - b) + (b - c)| \leq |a - b| + |b - c|.$$

Es decir, podríamos asegurar que $|a - c| \leq 5$, pero no podríamos dar su valor exacto (por ejemplo, si el orden fuera $a < c < b$, entonces haciendo un gráfico similar al anterior se obtiene que $|a - c| = 1$). «

Como se mencionó anteriormente, la comprensión del valor absoluto será fundamental al momento de resolver ecuaciones. Por eso, la observación siguiente evitará cometer un error frecuente:

$$\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3,$$

pero también

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Lo mismo ocurre con cualquier otro exponente par:

$$\sqrt[4]{(-2)^4} = \sqrt[4]{16} = 2.$$

NO CORRESPONDE

El error frecuente consiste en "cancelar" el índice con el exponente para obtener

$$\sqrt[4]{(-2)^4} = -2. \quad \text{✗}$$

Si el exponente es impar entonces no tenemos este problema de signos:

$$\sqrt[3]{(-2)^3} = \sqrt[3]{(-8)} = -2.$$

De lo anterior concluimos que si $x \in \mathbb{R}$ y n es un número natural, entonces:

$$\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x|, & \text{si } n \text{ es par;} \\ x, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} \tag{2.3.3}$$

Ejercicios 2.3.4

1. Hallar:

(a) $3|-5|$

(b) $|-1-6|$

(c) $-|-9|+1$

(d) $|2+3(-2)|$

(e) $-|(-2)^2|$

(f) $(-|(-2)|)^2$

2. Utilizar la definición de valor absoluto para reescribir las siguientes expresiones:

(a) $|x-2|$

(b) $2|3-x|+5$

(c) $|2y-3|-1$

(d) $-4|x+1|$

(e) $|-x-1|+2$

3. Representar gráficamente los siguientes conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 3\}, \quad B = \{x \in \mathbb{Z} : |x| < 3\}, \quad C = \{x \in \mathbb{N} : |x| < 3\}.$$

4. Representar gráficamente los siguientes conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 2\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 4\}, \quad C = \{x \in \mathbb{Z} : |x| > 1\}.$$

5. Reescribir los siguientes conjuntos como intervalos o como unión de dos intervalos, según corresponda:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\}, \quad B = \left\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq \tfrac{1}{2}\right\},$$
$$C = \{x \in \mathbb{R} : |x| > 2\}, \quad D = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 3\}.$$

6. Utilizar las propiedades del valor absoluto para reescribir las siguientes desigualdades:

(a) $|x - 2| < 4$

(b) $|3x + 1| \geq 2$

(c) $|3y| \leq 6$

(d) $|-y + 1| > 2$

(e) $|t + 5| \leq 2$

7. ¿Qué valores de x en $\mathbb{R}$ satisfacen $|x| < -3$? ¿Cuáles cumplen $|x| > -3$?

8. Demostrar que $|x - y| \neq |x| - |y|$ y que $|x + y| \neq |x| + |y|$.

9. Utilizando las propiedades del valor absoluto para $x \in \mathbb{R}$, seleccionar la opción correcta en cada caso:

(a)	$\|-x+1\| = \|x-1\|$ ☐	$\|-x+1\| = \|-x-1\|$ ☐	$\|-x+1\| = \|x+1\|$ ☐
(b)	$\|x+3\| = \|x\|+3$ ☐	$\|x+3\| \leq \|x\|+3$ ☐	$\|x+3\| \leq x+3$ ☐
(c)	$\|2x-3\| \leq \|2x\|-3$ ☐	$\|2x-3\| \leq 2x+3$ ☐	$\|2x-3\| \leq \|2x\|+3$ ☐
(d)	$\|3x-6\| = 3\|x-6\|$ ☐	$\|3x-6\| = 3\|x-2\|$ ☐	$\|3x-6\| = -3\|-x+2\|$ ☐

10. Marcar en cada caso la opción correcta:

(a) La distancia entre 2 y -4 es

$|2-4|$ ☐ $\quad$ $|2+4|$ ☐ $\quad$ $|2|-|-4|$ ☐

(b) La distancia entre -3 y -6 es

$|-3|+|-6|$ ☐ $\quad$ $|-3-6|$ ☐ $\quad$ $|-3+6|$ ☐

11. Jenaro, Zoe y Mateo viven a lo largo de una calle recta. Si sabemos que Jenaro vive a 5 cuadras de Zoe y a 2 cuadras de Mateo, ¿cuál es la máxima distancia a la que pueden encontrarse entre sí las casas de Zoe y Mateo? Justificarlo usando las propiedades del valor absoluto, y realizar un gráfico que ilustre la situación.

12. Hallar

$\sqrt[6]{(-3)^6} =$ $\quad$ $\sqrt[5]{(-3)^5} =$ $\quad$ $\sqrt[8]{x^8} =$ $\quad$ $\sqrt[3]{x^3} =$

13. ⚠ Buscar valores adecuados que prueben que las siguientes afirmaciones son **incorrectas**:

(a) Si $x < y$, entonces $|x| < |y|$. ✗

(b) Si $|x| < |y|$, entonces $x < y$. ✗

(c) Si $|x| < |y|$, entonces $|x + z| < |y + z|$. ✗

Capítulo 3

Polinomios y expresiones racionales

3.1. Polinomios

Los polinomios son objetos muy frecuentes en todas las ciencias que utilizan a la matemática como herramienta. Las ecuaciones y funciones que involucran polinomios tienen aplicaciones en una gran variedad de problemas, desde la matemática elemental hasta la física, química, economía, arquitectura y áreas relacionadas con la biología y la salud.

Trabajaremos aquí con polinomios de una sola **variable**, es decir, un valor que puede ir cambiando (a diferencia de las **constantes**, que denotan un valor fijo). Simbolizaremos aquí con x a la variable, pero, por supuesto, puede elegirse cualquier otro nombre. Esta variable puede tener exponente pero este deberá ser un número natural o cero, y podrá también estar multiplicada por cualquier constante real (número fijo llamado **coeficiente**). Un polinomio de una variable es una suma finita de este tipo de expresiones. Más precisamente, un **polinomio** en x con coeficientes reales es cualquier expresión de la forma

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

siendo los números reales $a_0, a_1, \ldots, a_n$ los coeficientes del polinomio.

El subíndice en estos coeficientes es una notación que nos indica a qué potencia de x acompaña cada uno: a_3 multiplica a x^3, a_0 a x^0, a_7 a x^7, y así sucesivamente. Por eso, a_k se denomina **coeficiente de grado k**. El coeficiente de grado 0, a_0, también recibe el nombre de **término independiente** o **constante**, ya que $x^0 = 1$ y, por lo tanto, la variable "desaparece" en dicho término.

Cada término a_kx^k que compone al polinomio se llama **monomio**. Por lo tanto un polinomio es simplemente una suma de monomios.

Los siguientes son ejemplos de polinomios:

$$3x^4 - 2x + \tfrac{1}{2}, \qquad \pi x^7 + 5x^2, \qquad 3, \qquad 8x + 1, \qquad x^2 - \sqrt{3}x. \quad ✔$$

En cambio, estas expresiones *no* son polinomios:

$$x^{-2} + 3x, \qquad \frac{1}{x^2 + 3x + 1}, \qquad x^{\frac{1}{2}} - 5, \qquad x^{\pi} - x^2. \quad ✗$$

Notar que cada número real puede ser visto como un polinomio, y es llamado **polinomio constante**. El caso especial del cero recibe el nombre de **polinomio nulo**.

Para ponerle nombre a un polinomio escribimos, por ejemplo,

$$p(x) = x^4 - 2x^2 + 1, \qquad q(x) = x - 3 + x^2, \qquad r(x) = 2x^3 - x^2 + \tfrac{1}{4}x + 5.$$

Es decir, los nombramos con alguna letra e indicamos entre paréntesis cómo hemos llamado a la variable, la cual, como ya mencionamos, no necesariamente debe llamarse x:

$$s(t) = t^2 - 3t + 1,$$

es un polinomio con t como variable.

El **grado** de un polinomio no nulo p, denotado como $\mathrm{gr}(p)$, se define como el exponente más grande al que aparece elevada la variable, siendo su coeficiente no nulo. Por ejemplo, para los polinomios dados arriba tenemos que

$$\mathrm{gr}(p) = 4, \qquad \mathrm{gr}(q) = 2, \qquad \mathrm{gr}(r) = 3, \qquad \mathrm{gr}(s) = 2.$$

En particular, los polinomios constantes pero *no nulos* tienen grado cero, mientras que **el polinomio nulo no posee grado**.

Cuando se define el grado de un polinomio se aclara "siendo su coeficiente no nulo". Esto se debe a que, por ejemplo, podemos escribir

$$p(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = 0x^5 + x^4 - x^2 + 1 = 0x^{18} + x^4 - 2x^2 + 1,$$

y de esta manera no podríamos determinar el grado. Pero, como se indica, para ello se tienen en cuenta solamente los términos cuyos coeficientes sean distintos de cero.

Si un polinomio tiene grado n, entonces a_n se denomina **coeficiente principal** del polinomio. Así, por ejemplo, en los polinomios anteriores el coeficiente principal de p es 1, al igual que el de q y s, mientras que el de r es 2.

Cuando un polinomio tiene coeficiente principal igual a 1, es llamado **polinomio mónico**. En los ejemplos anteriores, p, q y s son polinomios mónicos.

Un polinomio **completo** es aquel que tiene escritos todos los términos, desde el independiente hasta el término de mayor grado, incluidos todos los monomios con coeficientes nulos. Un polinomio está **ordenado** si los monomios que lo forman están escritos de mayor a menor grado* (es decir, los exponentes aparecen en forma decreciente).

Siguiendo con los mismos ejemplos anteriores, tenemos

$$p(x) = x^4 - 2x^2 + 1 \rightsquigarrow \text{Ordenado pero no completo.}$$
$$q(x) = x - 3 + x^2 \rightsquigarrow \text{Completo pero no ordenado.}$$
$$r(x) = 2x^3 - x^2 + \tfrac{1}{4}x + 5 \rightsquigarrow \text{Completo y ordenado.}$$

Los términos con coeficientes nulos (llamados **términos nulos**) suelen no escribirse, pero siempre podemos completar un polinomio agregando ceros como coeficientes de los términos de menor orden faltantes:

$$p(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = x^4 + 0x^3 - 2x^2 + 0x + 1 \rightsquigarrow \text{Completo y ordenado.} \quad ✔$$

Dos polinomios son **iguales** si tienen el mismo grado y, además, los coeficientes de cada término de igual grado son iguales. Entonces, los polinomios

$$q(x) = x - 3 + x^2 \qquad \text{y} \qquad \tilde{q}(x) = x^2 + x - 3$$

son iguales.

Los polinomios también se clasifican según la cantidad de términos no nulos que poseen, teniendo algunos de ellos su propio nombre:

- **Monomio:** un término.
- **Binomio:** dos términos.
- **Trinomio:** tres términos.
- **Cuatrinomio:** cuatro términos.

Siguiendo con los ejemplos dados en la página 55, p, q y s son trinomios mientras que r es un cuatrinomio. El polinomio $x^2 - 1$ es un binomio, mientras que $-2x^3$ es un monomio, al igual que los polinomios constantes.

Dado un número real c, el **valor numérico** (o **especialización**) de un polinomio en c es lo que resulta de sustituir el símbolo de la variable por el número c, y efectuar luego las operaciones indicadas en la expresión del polinomio. Más precisamente, dado un polinomio $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ y un número real c, el valor numérico de p en c se denota y define por

$$p(c) = a_n c^n + \cdots + a_2 c^2 + a_1 c + a_0.$$

*Esto es solamente una convención, ya que también se podrían ordenar de menor a mayor grado.

Ejemplo 45. **Valor numérico de un polinomio.** Si $p(x) = x^4 - 2x^2 + 1$, entonces el valor numérico de p en 0 es

$$p(0) = 0^4 - 2 \cdot 0^2 + 1 = 1.$$

De igual forma, obtenemos el valor numérico de p en 3 haciendo

$$p(3) = 3^4 - 2 \cdot 3^2 + 1 = 81 - 18 + 1 = 64.$$ «

Decimos que un número real c es **raíz** de un polinomio p si $p(c) = 0$, es decir, si el valor numérico de p en c es cero. Una raíz es conocida también como **cero** del polinomio.

Ejemplo 46. **Raíz de un polinomio.** Para el polinomio p del ejemplo anterior, podemos asegurar que 0 y 3 *no* son raíces de él, pues obtuvimos $p(0) = 1 \neq 0$, y $p(3) = 64 \neq 0$. Sin embargo, vemos que

$$p(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0,$$

por lo que 1 *sí* es una raíz de p. «

El concepto de raíz de un polinomio será fundamental para comprender cómo factorizarlo, lo cual es la clave para simplificar expresiones algebraicas o resolver ecuaciones polinómicas, como se verá más adelante.

Ejercicios 3.1

1. Determinar cuáles de las siguientes expresiones son polinomios y cuáles no. En caso de serlo, indicar su grado y su coeficiente principal:

(a) $\pi x^5 - x^2 + 1$

(b) $2x^3 - x^{-2} + 5x - 2$

(c) $2 - x^2 + \sqrt{2}x^5 - x^6$

(d) $x - \sqrt{x} + 5$

2. Reescribir los siguientes polinomios en forma completa y ordenada:

(a) $p(x) = 4 - 3x^5 + ex^2$

(b) $q(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 + x$

(c) $r(x) = x + 7 - 3x^2$

3. Clasificar los siguientes polinomios según su cantidad de términos:

(a) $x + 1$

(b) $x^5 - 3x + 2$

(c) $\frac{3}{2}x^6$

(d) $x^2 - 3x^5 + x - 1$

(e) $\sqrt{5}$

4. Hallar el valor numérico de los polinomios del ejercicio anterior en -2 y en 1.

5. Determinar si el/los valor/es indicado/s en cada caso corresponden o no a una raíz del polinomio:

(a) $p(x) = x^3 - 3x^2 - 18x + 40$; $c = 2$, $c = 0$, $c = -4$.

(b) $q(x) = -2x^3 + 10x^2 - 2x + 10$; $c = 0$, $c = -1$, $c = 5$.

(c) $r(x) = x^2 + 1$; c cualquier número real.

3.2. Operaciones entre polinomios

En esta sección nos ocuparemos de definir las operaciones suma, resta, producto y división entre polinomios.

3.2.1. Suma y resta de polinomios

Antes de sumar polinomios, comencemos sumando monomios. Si sumamos dos monomios de igual grado*, el resultado es otro monomio del mismo grado cuyo coeficiente es la suma de los coeficientes de los monomios:

$$ax^n + bx^n = (a + b)x^n,$$

o bien el polinomio nulo (cuando $a = -b$). Del mismo modo se procede con la resta de dos monomios de igual grado, pues $ax^n - bx^n = ax^n + (-b)x^n$. Entonces

$$ax^n - bx^n = (a - b)x^n.$$

Ejemplo 47. **Sumando y restando monomios.**

$$3x^2 + 5x^2 = 8x^2, \qquad 2x^5 - 6x^5 = -4x^5, \qquad x + \sqrt{2}x = (1 + \sqrt{2})x. \quad \ll$$

Puesto que un polinomio está formado por varios monomios, para sumar (o restar) dos polinomios vamos a sumar (o restar) los monomios de igual grado de cada uno de ellos (completando con cero cuando corresponda). Más precisamente, tenemos la siguiente definición:

*Los monomios de igual grado se llaman también **monomios semejantes**.

La **suma** de polinomios es una operación en la que, partiendo de dos polinomios p y q, obtenemos un tercer polinomio, denotado $p+q$, que tiene como coeficiente de cada monomio a la suma de los coeficientes de los monomios de igual grado de p y q.

Ejemplo 48. **Sumando dos polinomios.** Considerar $p(x) = 4x^5 - 3x + x^2$ y $q(x) = -2x^3 + x + 4x^2 + 1$. Entonces

$$\begin{aligned}(p+q)(x) &= (4x^5 + 0x^4 + 0x^3 + x^2 - 3x + 0) + (0x^5 + 0x^4 - 2x^3 + 4x^2 + x + 1)\\ &= 4x^5 + 0x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 2x + 1.\end{aligned}$$

Luego $(p+q)(x) = 4x^5 - 2x^3 + 5x^2 - 2x + 1$. «

La **resta** $p - q$ se define como el polinomio $p + (-q)$, siendo $-q$ el **polinomio opuesto** de q, es decir, el polinomio cuyos coeficientes son los opuestos de los coeficientes de q. Esto implica que para restar dos polinomios, se restan los coeficientes de los monomios del mismo grado de p y q.

Ejemplo 49. **Restando polinomios.** Consideremos, como en el ejemplo anterior, $p(x) = 4x^5 - 3x + x^2$ y $q(x) = -2x^3 + x + 4x^2 + 1$. Entonces

$$\begin{aligned}(p-q)(x) &= (4x^5 + 0x^4 + 0x^3 + x^2 - 3x + 0) - (0x^5 + 0x^4 - 2x^3 + 4x^2 + x + 1)\\ &= 4x^5 + 0x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x - 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto $(p-q)(x) = 4x^5 + 2x^3 - 3x^2 - 4x - 1$. «

El paso de ordenar y completar ambos polinomios antes de sumarlos no es obligatorio, sirve simplemente para organizar los monomios y no olvidarnos de ninguno. Este procedimiento también puede hacerse de manera similar pero encolumnando los coeficientes de igual grado:

x^5	x^4	x^3	x^2	x	x^0
4	0	0	1	−3	0
0	0	−2	4	1	1
4	0	−2	5	−2	1

↑ $p+q$

x^5	x^4	x^3	x^2	x	x^0
4	0	0	1	−3	0
0	0	2	−4	−1	−1
4	0	2	−3	−4	−1

↑ $p-q$

Por lo tanto, se concluye que $(p+q)(x) = 4x^5 - 2x^3 + 5x^2 - 2x + 1$, y que $(p-q)(x) = 4x^5 + 2x^3 - 3x^2 - 4x - 1$, como obtuvimos anteriormente.

Lo que está escrito sobre la línea de puntos suele no ponerse, pero ayuda a recordar en qué forma se ordenaron los exponentes, si creciente o decrecientemente. Si dicho orden está claro, ese renglón puede obviarse.

De cualquiera de las dos formas anteriores pueden también sumarse (o restarse) más de dos polinomios, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 50. **Sumando más de dos polinomios.** Calcular $(p-q+r)(x)$, siendo

$$p(x) = 2x^4-x^2-3x, \qquad q(x) = -3x^2+2x-5x^3+1, \qquad r(x) = 7-x^4+3x^2-x.$$

Solución: Lo haremos mediante el método de encolumnar los respectivos coeficientes, cambiando de signo los de q pues está restando. Esta vez no vamos a escribir las potencias de x, ya que a lo largo de este libro lo haremos siempre en forma decreciente.

$$\begin{array}{rrrrr} 2 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 7 \\ \hline 1 & 5 & 5 & -6 & 6 \end{array}$$

Por lo tanto $(p-q+r)(x) = x^4+5x^3+5x^2-6x+6$. «

 De las propiedades de la suma de números reales se deduce que la suma de polinomios es **conmutativa** ($p+q = q+p$) y **asociativa** ($(p+q)+r = p+(q+r)$), que el polinomio nulo es **neutro** ($p+0 = p$), y que la suma de un polinomio con su **opuesto** da como resultado el polinomio nulo ($p+(-p) = 0$).

 Puesto que la resta de dos polinomios $p-q$ se define como la suma del primero más el opuesto del segundo, tenemos que: el orden importa, por lo tanto **la resta no es conmutativa** (ver Ejercicio 1e).

Ejemplo 51. **Modelando con polinomios.** Una empresa fabrica y vende un producto. La ganancia se determina restando de los ingresos obtenidos el costo de los gastos de producción. Para este producto, dichas cantidades vienen dadas, en pesos, por:

$$I(x) = x^3-3x^2+12x; \qquad C(x) = x^3-6x^2+15x,$$

siendo x la cantidad de unidades del producto. Se pide:

(a) Hallar el polinomio que representa la ganancia de la empresa al vender x unidades del producto.
(b) La ganancia obtenida al vender 100 unidades del producto.

Solución: La ganancia de la empresa al vender x unidades es

$$G(x) = I(x)-C(x) = x^3-3x^2+12x-(x^3-6x^2+15x) = 3x^2-3x.$$

Luego, la ganancia al vender 100 unidades es de $G(100) = 29700$ pesos. «

Ejercicios 3.2.1

1. Sean $p(x) = 2x^4 - 3x^2 - 5x^3 + x^5$, $q(x) = 2 - 3x + x^3 - 2x^4$, $r(x) = 2 - x^5$ y $s(x) = x^2 + 2x^4$. Realizar las siguientes operaciones y expresar el resultado como un polinomio ordenado:

(a) $p - r - s$

(b) $p + p$

(c) $s - r + q$

(d) $q + p + s$

(e) $p - q$ y $q - p$. Comparar los resultados.

2. Determinar $\mathrm{gr}(p + s)$, $\mathrm{gr}(q + s)$, $\mathrm{gr}(r + s)$, siendo p, q, r y s como en el ejercicio anterior. Concluir si existe o no una regla sobre el grado de la suma de polinomios.

3. ✂ Se recorta un rectángulo de cartulina cuya base es x cm y su altura $2x^2$ cm. Hallar el polinomio que representa el perímetro del rectángulo, y el valor del mismo cuando $x = 2$.

3.2.2. Producto de polinomios

Al igual que con la suma, comencemos viendo cómo se realiza el producto de monomios, el cual se define como:

$$(ax^n)(bx^m) = (a \cdot b)x^{n+m}.$$

Es decir, el resultado es otro monomio cuyo grado es la *suma* de los grados de los dos monomios, y cuyo coeficiente es el *producto* de los coeficientes de los monomios.

Ejemplo 52. **Multiplicando monomios.**

$$\left(3x^4\right) \cdot \left(-2x^5\right) = -6x^9, \qquad \left(\frac{1}{2}x^3\right)(2x) = x^4, \qquad (-4)(-x^7) = 4x^7. \quad \ll$$

De lo anterior y de la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma (y a la resta) en los reales, se concluye que para efectuar el **producto** $p \cdot q$ de dos polinomios p y q, se multiplica cada monomio del primer polinomio por todos los monomios que forman el segundo polinomio, y se suman todos los monomios obtenidos (sumar significa respetar los signos obtenidos al hacer el producto). Para simplificar el resultado se suman los monomios de igual grado, si los hubiera.

Ejemplo 53. **Multiplicando dos polinomios.** Hallar el producto entre los polinomios $p(x) = 2x^2 - 4x$ y $q(x) = 3 + 5x$.

Solución:

$$\begin{aligned}(2x^2 - 4x)(3 + 5x) &= \left(2x^2\right)(3) + \left(2x^2\right)(5x) + (-4x)(3) + (-4x)(5x) \\ &= 6x^2 + 10x^3 - 12x - 20x^2 \\ &= 10x^3 - 14x^2 - 12x.\end{aligned}$$

«

De la definición y de las propiedades de la suma y el producto se deducen los siguientes hechos:

- El producto de polinomios satisface las propiedades **conmutativa** (es decir, $p \cdot q = q \cdot p$) y **asociativa** ($p \cdot (q \cdot r) = (p \cdot q) \cdot r$).
- El polinomio de grado cero $p(x) = 1$ es el **neutro multiplicativo**: $q \cdot p = q$.
- El polinomio nulo es el **absorbente multiplicativo**: $q \cdot 0 = 0$.
- Vale la propiedad **distributiva** respecto de la suma y la resta:

$$p \cdot (q \pm r) = p \cdot q \pm p \cdot r.$$

- Los únicos polinomios cuyo inverso multiplicativo es otro polinomio son los polinomios constantes no nulos.
- El **grado del producto** es la suma de los grados de los factores*:

$$\operatorname{gr}(p \cdot q) = \operatorname{gr}(p) + \operatorname{gr}(q).$$

La propiedad asociativa es fundamental ya que cuando tenemos un producto de más de dos polinomios, la forma de realizarlo es asociando de a pares, como se ilustra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 54. **Multiplicando más de dos polinomios.**

$$\begin{aligned}(x+3)(2x^3+2-x)(1-x^2) &= \Big((x+3)(2x^3+2-x)\Big)(1-x^2) \\ &= \Big((x+3)(2x^3+2-x)\Big)(1-x^2)\end{aligned}$$

*Se diferencia de la suma y resta, donde no existe una regla para el grado del polinomio resultante, como se vio en el Ejercicio 2 de la sección anterior.

$$
\begin{aligned}
&= \left(2x^4 + 2x - x^2 + 6x^3 + 6 - 3x\right)\left(1 - x^2\right) \\
&= \left(2x^4 + 6x^3 - x^2 - x + 6\right)\left(1 - x^2\right) \\
&= 2x^4 - 2x^6 + 6x^3 - 6x^5 - x^2 + x^4 - x + x^3 + 6 - 6x^2 \\
&= -2x^6 - 6x^5 + 3x^4 + 7x^3 - 7x^2 - x + 6,
\end{aligned}
$$

donde en el antepenúltimo paso no se dibujaron las "flechas", simplemente se expresó el resultado de multiplicar cada monomio del primer polinomio por cada uno de los del segundo. Finalmente, se sumaron los monomios de igual grado y se ordenaron. «

Si bien cualquier producto de polinomios se puede efectuar como se indicó arriba, hay algunos casos particulares que, si los sabemos manejar, podrán ahorrarnos un poco de tiempo al momento de hacer los cálculos. Sin embargo, si al intentar usar alguno de estos casos particulares no se recuerda la fórmula, siempre se puede recurrir a hacer el producto en la forma tradicional.

Los casos especiales que veremos son tres: cuadrado de un binomio, cubo de un binomio, y un producto de binomios cuyo resultado es una diferencia de cuadrados.

Cuadrado de un binomio.

Como su nombre lo indica, analizaremos el resultado de elevar al cuadrado un binomio, lo que significa multiplicar el binomio por sí mismo. Lo haremos primero para una expresión de la forma $a + b$:

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + a\cdot b + b\cdot a + b^2 = a^2 + 2ab + b^2. \quad (3.2.1)$$

En palabras, si elevamos al cuadrado la suma de dos términos, se obtiene la suma entre el cuadrado del primero, el cuadrado del segundo y el doble producto de ellos. Análogamente*,

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - a\cdot b - b\cdot a + b^2 = a^2 - 2ab + b^2. \quad (3.2.2)$$

Notar que el signo menos solamente afecta, en el resultado final, al término que tiene el doble producto de los términos, ya que $(-b)(-b) = b^2$.

Apliquemos las fórmulas (3.2.1) y (3.2.2) para comprenderlas mejor.

Ejemplo 55. Cuadrado de un binomio.

- $(x+5)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25.$
- $(x-3)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9.$
- $(2x^3 - 4x)^2 = \left(2x^3\right)^2 - 2\cdot(2x^3)\cdot(4x) + (4x)^2 = 4x^6 - 16x^4 + 16x^2.$ «

*Este resultado puede obtenerse también a partir de la suma, ya que $a - b = a + (-b)$.

El trinomio que se obtiene al elevar un binomio al cuadrado es llamado **trinomio cuadrado perfecto**. Polinomios de esta forma serán estudiados con más detalle en el Capítulo 4.

Cubo de un binomio.

Ahora consideraremos el resultado de hacer $(a+b)^3$. Aplicando la definición de potencia y (3.2.1), obtenemos

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)\left(a^2+2ab+b^2\right).$$

Resolviendo este producto se llega al siguiente resultado:

$$(a+b)^3 = a^3+3ba^2+3ab^2+b^3. \tag{3.2.3}$$

Similarmente se obtiene:

$$(a-b)^3 = a^3-3ba^2+3ab^2-b^3. \tag{3.2.4}$$

Notar que en este caso el signo menos afecta a los términos en los que b posee exponentes impares.

Ejemplo 56. **Cubo de un binomio.** Aplicar las fórmulas (3.2.3) o (3.2.4) para obtener el cubo de los siguientes binomios:

$$(x+2)^3, \qquad (x-3)^3, \qquad \left(3x^2+x\right)^3.$$

Solución:

- $(x+2)^3 = x^3+3\cdot 2\cdot x^2+3\cdot x\cdot 2^2+2^3 = x^3+6x^2+12x+8.$
- $(x-3)^3 = x^3-3\cdot 3\cdot x^2+3\cdot x\cdot 3^2-3^3 = x^3-9x^2+27x-27.$
- $\left(3x^2+x\right)^3 = \left(3x^2\right)^3+3x\left(3x^2\right)^2+3\left(3x^2\right)x^2+x^3$
  $= 27x^6+27x^5+9x^4+x^3.$ «

El polinomio que se obtiene al elevar un binomio al cubo se llama **cuatrinomio cubo perfecto**.

Diferencia de cuadrados.

Consideremos un producto de dos factores con el siguiente aspecto:

$$(a+b)(a-b) = a^2-\cancel{ab}+\cancel{ba}-b^2 = a^2-b^2.$$

Luego,

$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2. \tag{3.2.5}$$

Se llama **diferencia de cuadrados** al resultado obtenido, ya que es la diferencia de dos cuadrados. Notar que el cuadrado que aparece restando es el correspondiente al valor que cambia de signo entre los dos factores.

Ejemplo 57. Utilizar la fórmula (3.2.5) para efectuar los siguientes productos:

- $(x+3)(x-3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$.
- $(2x+5)(2x-5) = (2x)^2 - 5^2 = 4x^2 - 25$.
- $(x^2 - \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2}) = \left(x^2\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = x^4 - 2$.
- $(x^3 + 4x)(x^3 - 4x) = \left(x^3\right)^2 - (4x)^2 = x^6 - 16x^2$. «

Manejar los tres casos anteriores será una herramienta fundamental para realizar el proceso inverso en la Sección 3.3, en donde el objetivo será descomponer un polinomio como producto de otros.

Ejercicios 3.2.2

1. Verificar que vale la propiedad distributiva respecto de la suma

$$p \cdot (q + r) = p \cdot q + p \cdot r,$$

con los polinomios $p(x) = x^2 + 1$, $q(x) = x - 2$, y $r(x) = 2x - 1$.

2. Determinar el grado del producto de $(x^4 - \sqrt{2}x^3 + 3x^9 + 1)$ por $(\pi x^8 - x)$.

3. Determinar el grado del producto de un polinomio de grado 15 por $\frac{1}{2}x$.

4. Realizar los siguientes productos:

(a) $(2x^4)(-3x^2)\left(\frac{1}{6}x\right)$
(b) $(-3x^4 + 2x - 3)(x - 3x^2 + 1)$
(c) $(x^5 - x)(-2 + x^3 + x^2)$
(d) $(x+2)(-x^3 + 4)(-x - 3)$
(e) $\left(-3x + \frac{1}{2}x^3\right)\left(-2x^2 + 4\right)$

5. Realizar los siguientes productos utilizando las fórmulas obtenidas para los casos especiales presentados en esta sección:

(a) $(x+7)^2$
(b) $(2x-3)^2$
(c) $(x^3+1)^2$
(d) $(x-4)^3$
(e) $\left(\frac{1}{2}x + 3\right)^3$
(f) $(z^2-1)^3$
(g) $(t+7)(t-7)$
(h) $(4x-c)(4x+c)$
(i) $(\sqrt{x} - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{3})$
(j) $(x^2 + \pi)(x^2 - \pi)$
(k) $(x+2)(x+3)(x-2)(x+3)$

3.2.3. División de polinomios

Como en las operaciones anteriores, comencemos dividiendo dos monomios, lo cual se define como:

$$(ax^n) : (bx^m) = (a : b)x^{n-m},$$

para b distinto de cero. Para que el resultado sea un monomio, el exponente debe ser natural o cero, lo que se garantiza cuando $n \geq m$. Es decir, si $n \geq m$, el resultado es otro monomio cuyo grado es la *resta* de los grados de los dos monomios, y cuyo coeficiente es el *cociente (división)* de los coeficientes de los monomios.

Ejemplo 58. **Dividiendo monomios.**

$$\frac{3x^6}{-2x^5} = -\frac{3}{2}x, \qquad (6x^8) : (3x^5) = 2x^3, \qquad \frac{-6x^4}{-4x^4} = \frac{3}{2}. \qquad \ll$$

Nuevamente la división de monomios será la clave para dividir polinomios. Aunque la división de polinomios suele asustar a los estudiantes, es, en realidad, más sencilla de lo que parece. Para hacerla hay que seguir un algoritmo, es decir, una serie de instrucciones que se repite. Vamos a describir a continuación este algoritmo y luego lo aplicaremos en algunos ejemplos.

Algoritmo de la división.

- **Paso 1.** Escribir ambos polinomios ordenados (de mayor a menor exponente), y el dividendo completo.
- **Paso 2.** Dividir el monomio de mayor grado del dividendo por el de mayor grado del divisor.
- **Paso 3.** Multiplicar el monomio obtenido por *todo* el polinomio divisor, y *restarle* este resultado al dividendo.
- **Paso 4.** Comparar el grado del polinomio obtenido con el del divisor:
  - Si el grado del polinomio obtenido es mayor o igual que el grado del divisor, volver al paso 2 y repetir el proceso tomando como dividendo a este nuevo polinomio.
  - Si el polinomio obtenido tiene grado menor que el grado del divisor o es el polinomio nulo, la división termina.

Ilustramos este proceso y recordamos la terminología en el siguiente ejemplo. Haremos la división

$$(4x^4 - 3x^2 - 4x^3 - 1) : (2x^2 - x + 1),$$

NO CORRESPONDE

$$
\begin{array}{cccccc|ccc}
-x^5 & +12x^4 & -18x^3 & +0x^2 & +0x & +12 & 2x^3 & -4x^2 & +2 \\
-x^5 & +2x^4 & +0x^3 & -x^2 & +0x & +0 & -\frac{1}{2}x^2 & +5x & +1 \\
\hline
/ & 10x^4 & -18x^3 & +x^2 & +0x & +12 & & & \\
 & 10x^4 & -20x^3 & +0x^2 & +10x & +0 & & & \\
\hline
 & / & 2x^3 & +x^2 & -10x & +12 & & & \\
 & & 2x^3 & -4x^2 & +0x & +2 & & & \\
\hline
 & & / & 5x^2 & -10x & +10 & & &
\end{array}
$$

Por lo tanto

$$\frac{-x^5 + 12x^4 - 18x^3 + 12}{2 - 4x^2 + 2x^3} = -\frac{1}{2}x^2 + 5x + 1 + \frac{5x^2 - 10x + 10}{2 - 4x^2 + 2x^3}.$$

En otras palabras, el cociente es $-\frac{1}{2}x^2 + 5x + 1$ y el resto es $5x^2 - 10x + 10$. En el Ejercicio 3 se pide la verificación de este resultado. «

De la definición de división de monomios y del algoritmo de la división tenemos que el **grado del cociente** es igual al grado de dividendo menos el grado del divisor: $\mathrm{gr}(p : q) = \mathrm{gr}(p) - \mathrm{gr}(q)$.

La regla de Ruffini.

Existe una forma práctica para hacer el cociente cuando el divisor es un binomio de la forma $x - r$ con r un número real (positivo o negativo). Notar que tanto el exponente como el coeficiente de x deben ser iguales a 1.

Describimos el algoritmo para dividir $p(x) : (x - r)$ según esta regla y lo ilustramos a continuación.

- **Paso 1.** Se trazan dos líneas perpendiculares (formando una letra L) y se escriben en el primer renglón los coeficientes a_n, a_{n-1}, …, a_1, a_0 de p, ordenados y completos (ver el ejemplo que sigue para comprender esto).
- **Paso 2.** Se escribe el número r en el segundo renglón, del lado izquierdo de la línea vertical, y el coeficiente principal a_n de p se "baja" al renglón inferior, debajo de la línea horizontal.
- **Paso 3.** Se multiplica a_n por r y se escribe debajo de a_{n-1}.
- **Paso 4.** Se suman estos dos valores (a_{n-1} y ra_n), y se coloca el resultado en la misma columna, en el renglón inferior.
- **Paso 5.** Se repite el proceso con este número: se multiplica por r, se coloca debajo de a_{n-2} y se suma. Se sigue así hasta a_0.

NO CORRESPONDE

Puesto que el grado del resto de un cociente debe ser menor que el grado del divisor, que en este caso es 1, se concluye que el resto de dividir un polinomio cualquiera por $x - r$ es un número real (es decir, un polinomio de grado cero o el polinomio nulo). **El resto es el número que se obtiene al final del renglón inferior, mientras que los demás números son los coeficientes del cociente** (el cociente tendrá un grado menos que p, pues el divisor tiene grado 1).

Ilustremos los pasos de la regla de Ruffini realizando la división

$$\frac{3x^4 - 2x^2 + x - 3}{x + 1}.$$

Pasos 1 y 2: Notar que $x + 1 = x - (-1)$, por lo que $r = -1$ (es decir, como la fórmula viene dada con un signo menos delante de r, el número r tiene el signo opuesto al que vemos en el divisor).

	3	0	−2	1	−3
−1					
	3				

Paso 3: Multiplicamos $3 \cdot (-1)$ y encolumnamos:

	3	0	−2	1	−3
−1		−3			
	3				

Paso 4: Sumamos la columna:

	3	0	−2	1	−3
−1		−3			
	3	−3			

Paso 5: Repetimos hasta el final:

	3	0	−2	1	−3
−1		−3	3	−1	0
	3	−3	1	0	−3

coeficientes del cociente — resto

Entonces, el cociente es $3x^3 - 3x^2 + x$ y el resto es -3. Como siempre, para verificarlo podemos ver que recuperamos el polinomio dividendo haciendo "cociente por divisor más resto":

$$(3x^3 - 3x^2 + x)(x+1) + (-3) = 3x^4 - 2x^2 + x - 3. \quad ✔$$

Ejemplo 60. **Aplicando Ruffini.** Aplicar la regla de Ruffini para efectuar las siguientes divisiones:

$$\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x - 1}, \qquad \frac{x^5 - 3x^3 - x + 1}{x + 1}.$$

Solución: Apliquemos la regla en cada caso

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & & 1 & 2 & 1 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & & -1 & 1 & 2 & -2 & 3 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 2 & -3 & 4 \end{array}$$

Entonces, para la primera división el cociente es x^2+2x+1 y el resto es 0. Luego

$$x^3 + x^2 - x - 1 = (x^2 + 2x + 1)(x - 1),$$

mientras que para la segunda, el cociente es $x^4 - x^3 - 2x^2 + 2x - 3$ y el resto es 4. Por lo tanto

$$\frac{x^5 - 3x^3 - x + 1}{x + 1} = \left(x^4 - x^3 - 2x^2 + 2x - 3\right) + \frac{4}{x + 1}.$$

Como antes, para verificarlo podemos ver que recuperamos el polinomio dividendo haciendo "cociente por divisor más resto". «

Ejercicios 3.2.3

1. Dividir los siguientes monomios:

(**a**) $\left(6x^7\right) : \left(2x^3\right)$ (**b**) $\left(2x^5\right) : \left(-3x^4\right)$ (**c**) $\left(\sqrt{2}x^8\right) : \left(x^8\right)$

2. Determinar el grado del cociente entre $\pi x^8 - \frac{4}{6}x^4 - 3x^3$ y $-x^3 + 4x + 2$.

3. Verificar que el resultado obtenido en el Ejemplo 59 es correcto.

4. Realizar las siguientes divisiones de polinomios y verificar el resultado:

(a) $(6x^3 - 2x^2 - 1) : (x^2 + x + 2)$

(b) $(x^3 + 6x^2 + 6x + 5) : (x^2 + x + 1)$

(c) $(8x^5 + 1) : (2x^3 - 1)$

(d) $(6x^5 + x^4 + 4x^2 - 7x + 1) : (2x^2 + x - 3)$

5. Realizar las siguientes divisiones usando la regla de Ruffini y verificar:

(a) $(6x^4 + 8x^3 - 10x^2 + 8x - 2) : (x - 2)$

(b) $(x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 3x - 5) : (x - 5)$

(c) $(-3x^5 + x^4 - 5x^2 + x^3 - 2) : (x + 1)$

(d) $(3 - 3x^3 + 6x^4) : (x + 2)$

6. Realizar cada una de las siguientes divisiones primero mediante el algoritmo de la división y luego usando la regla de Ruffini.

(a) $(2x^4 - 3x^2 + 2x - 3) : (x + 3)$

(b) $(x^3 + 2x^2 - 4x - 8) : (x - 2)$

3.3. Factorización de polinomios

Como vimos en la sección anterior, cuando realizamos una división (de polinomios o de números naturales), la igualdad

$$\text{dividendo} = \text{cociente} \cdot \text{divisor} + \text{resto}$$

nos permite verificar el resultado obtenido. En el caso en que el resto sea cero, la igualdad anterior se transforma en

$$\text{dividendo} = \text{cociente} \cdot \text{divisor}.$$

En otras palabras, cuando el resto es cero logramos escribir al dividendo como producto de dos factores: el cociente y el divisor. Por ejemplo, para el caso de números naturales tenemos que

$$10 = 2 \cdot 5,$$

pues el cociente al dividir 10 por 2 es 5, y el resto es cero. En forma más general, si al dividir p por q obtenemos un cociente c y resto cero, entonces

$$p = q \cdot c$$

y decimos que p es **divisible** por q, o también que p es **múltiplo** de q. Desde otro punto de vista, se dice que q es **divisor** de p, o que q es **factor** de p. Esta terminología se emplea tanto para números naturales como para polinomios.

Ejemplo 61. **Factores de un polinomio.** Como vimos en el primer caso del Ejemplo 60, aplicando la regla de Ruffini obtuvimos que

$$x^3 + x^2 - x - 1 = (x^2 + 2x + 1)(x - 1).$$

Entonces decimos que $x^3 + x^2 - x - 1$ es divisible por $x^2 + 2x + 1$ y por $x - 1$, o que es múltiplo de cada uno de ellos. También decimos que $x^2 + 2x + 1$ y $x - 1$ son factores de $x^3 + x^2 - x - 1$, o que son divisores de él. «

Factorizar un polinomio significa escribirlo como producto de otros polinomios, como en el ejemplo anterior. Este es el objetivo de esta sección, y resultará una herramienta fundamental para resolver ecuaciones polinómicas.

Comencemos con casos ya conocidos, que son los estudiados en la sección anterior.

Diferencia de cuadrados. Este es uno de los casos más simples de identificar, ya que, como su nombre lo indica, es una diferencia (es decir, una resta) de dos cantidades al cuadrado. Esto es, nos encontramos con una expresión de la forma

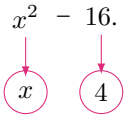
$$a^2 - b^2,$$

y queremos factorizarla. En la sección anterior vimos que este es el aspecto del producto

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b),$$

obteniendo así una factorización del binomio dado.

Ejemplo 62. **Reconociendo una diferencia de cuadrados.** Como se dijo antes, es sencillo reconocer este caso: solamente hay que extraer las raíces de las dos cantidades involucradas en la resta:



Entonces factorizamos $x^2 - 16 = (x + 4)(x - 4)$. «

Notar que el término que aparece sumando en un factor y restando en el otro, es la cantidad cuyo cuadrado estaba restando en el binomio dado. El otro término siempre tiene un signo + delante.

Ejemplo 63. **Otra diferencia de cuadrados.** Factoricemos ahora $9t^8 - 5$:

$$9t^8 \;-\; 5.$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$3t^4 \qquad \sqrt{5}$$

Entonces $9t^8 - 5 = \left(3t^4 + \sqrt{5}\right)\left(3t^4 - \sqrt{5}\right)$. «

Trinomio cuadrado perfecto. Si el polinomio que queremos factorizar es de la forma

$$a^2 + 2ab + b^2,$$

entonces es lo que llamamos en la sección anterior un trinomio cuadrado perfecto. Sabemos que este tipo de trinomios provienen de hacer $(a+b)^2$. Es decir, en este caso se tiene

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2,$$

lo cual es una factorización del polinomio dado, pues $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$. Los factores repetidos se expresan en forma de potencia simplemente para agilizar la escritura.

Ejemplo 64. **Reconociendo un trinomio cuadrado perfecto.** Con la práctica, reconocer este tipo de trinomios no es difícil. Esencialmente, la idea es reconocer en el trinomio dos términos que sean el cuadrado de ciertas cantidades, y verificar si el término restante es el doble producto de dichas cantidades. Por ejemplo, considerar el trinomio

$$x^2 + 6x + 9.$$

Observando el polinomio, identificamos dos términos que son el cuadrado de dos cantidades: x y 3 (cuyos cuadrados son x^2 y 9). Además, si hacemos el doble producto de estas cantidades obtenemos $2 \cdot 3 \cdot x = 6x$, que coincide con el término restante. Entonces es un trinomio cuadrado perfecto, el cual se factoriza como

$$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2.$$

Miremos ahora el trinomio

$$x^2 - 10x + 25.$$

Aquí los cuadrados que identificamos son x^2 y 25, provenientes de x y 5. Sin embargo, el doble producto de ellos es $10x$, y en el trinomio aparece con signo opuesto. Para lograr $-10x$, tomamos una de las dos cantidades negativa, por ejemplo, -5 (y se sigue cumpliendo que $(-5)^2 = 25$). Entonces

$$x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2.$$ «

Los dos trinomios presentados en el ejemplo anterior muestran que se debe observar el signo del término de la forma $2ab$ para determinar si se factoriza como $(a+b)^2$, o como $(a-b)^2$. En este último caso, ya que $z^2 = (-z)^2$ para cualquier número real z, se tiene que $(a-b)^2 = (-a+b)^2$, por lo que cualquiera de estas dos factorizaciones es correcta.

En el siguiente ejemplo se incluye una forma más "visual" de identificar trinomios cuadrados perfectos. El mismo muestra además que el trinomio no debe ser necesariamente un polinomio de grado 2 y con coeficiente principal igual a 1.

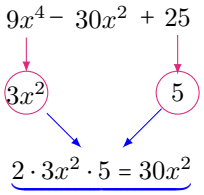
Ejemplo 65. **Más trinomios cuadrados perfectos.** Factorizar los siguientes trinomios

$$p(x) = x^6 + 8x^3 + 16, \qquad q(x) = 9x^4 - 30x^2 + 25.$$

Solución: Para el caso de p, los dos cuadrados que vemos son x^6 que es el cuadrado de x^3, y 16 que es el cuadrado de 4. El doble producto de estas cantidades es $2 \cdot 4 \cdot x^3 = 8x^3$, que coincide con el término restante. Por lo tanto

$$p(x) = (x^3 + 4)^2.$$

Hagamos el mismo razonamiento para q pero en forma gráfica que suele ayudar:



Doble producto de las raíces halladas.

En el gráfico anterior, debajo de las flechas verticales, identificamos las dos cantidades cuyos cuadrados son los términos del trinomio, y luego hicimos el doble producto de estas cantidades para comparar con el término restante. Finalmente, prestamos atención al signo de este término para concluir que

$$q(x) = \left(3x^2 - 5\right)^2.$$ «

Cuatrinomio cubo perfecto. Si el polinomio que queremos factorizar es de la forma

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

entonces es lo que llamamos en la sección anterior un cuatrinomio cubo perfecto. Sabemos que este tipo de cuatrinomios provienen de hacer $(a+b)^3$. Es decir, en este caso se tiene

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3,$$

lo que resulta una factorización del polinomio dado ya que

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b).$$

Como antes, utilizamos la potencia para agilizar la escritura de factores repetidos.

En los siguientes ejemplos identificaremos cuatrinomios cubos perfectos de manera análoga a lo que hicimos para reconocer trinomios cubos perfectos, solamente que ahora debemos identificar *cubos* en lugar de cuadrados, lo que automáticamente nos define los signos de cada término.

Ejemplo 66. **Reconociendo un cuatrinomio cubo perfecto.** Factorizar los polinomios

$$p(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8, \qquad q(t) = 27t^6 + 27t^4 + 9t^2 + 1.$$

Solución: Comencemos con el polinomio p:

$$x^3 - \underline{6x^2} + \underline{12x} - 8$$

$$x \qquad -2$$

$$3 \cdot x^2 \cdot (-2) = -6x^2, \qquad 3 \cdot x \cdot (-2)^2 = 12x.$$

Entonces $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x-2)^3$. Con respecto a q, tenemos:

$$27t^6 + \underline{27t^4} + \underline{9t^2} + 1$$

$$3t^2 \qquad 1$$

$$3 \cdot (3t^2)^2 \cdot 1 = 27t^4, \qquad 3 \cdot 3t^2 \cdot 1^2 = 9t^2.$$

Entonces $27t^6 + 27t^4 + 9t^2 + 1 = (3t^2+1)^3$. «

? Pero, ¿qué podemos hacer para factorizar polinomios que no tengan la forma de los presentados hasta ahora? Lo primero que debemos intentar es sacar *factor común*, como se explica a continuación.

Factor común. Así como los casos anteriores provinieron de leer una igualdad ya conocida desde el lado adecuado, lo mismo ocurre con el método de extraer factores comunes en un polinomio. Este método consiste en determinar si el polinomio dado es el resultado de haber aplicado la propiedad distributiva del producto respecto de la suma o la resta. Por ejemplo, esta propiedad nos dice que

$$3x^2\big(x+2\big) = 3x^3 + 6x^2.$$

Extraer factor común es exactamente el proceso inverso: nos dan el polinomio $3x^3 + 6x^2$ y debemos identificar qué factores aparecen en *todos* sus términos. En este caso vemos que el 3 aparece como factor en ambos términos (ya que $6 = 2 \cdot 3$), y también x^2 (ya que $x^3 = x^2 \cdot x$). Los factores comunes a todos los términos los extraemos, y lo multiplicamos por el polinomio que resulta de "quitarle" dichos factores al original (esto significa dividir cada término por lo que sacamos como factor común):

$$3x^3 + 6x^2 = 3x^2(x+2).$$

Como siempre es posible **verificar** si lo hemos hecho bien, aplicando la propiedad distributiva del lado derecho de la igualdad para ver si recuperamos el polinomio del lado izquierdo.

De esta forma hemos factorizado el polinomio dado. Recordemos que factorizar un polinomio significa escribirlo como producto de otros *polinomios*, por lo que x se extrae como factor común con el menor exponente al que aparece, para evitar exponentes negativos. Por ejemplo, si en el ejemplo anterior hubiéramos tomado como factor común a $3x^3$, nos queda

$$3x^3 + 6x^2 = 3x^3(1 + 2x^{-1}),$$

y, aunque la igualdad es cierta para todo $x \neq 0$ (hacer la distributiva del lado izquierdo para verificarlo), lo que queda entre paréntesis *no* es un polinomio.

Ejemplo 67. **Extrayendo factores comunes.**

- $x^4 - 4x^3 + x^2 = x^2(x^2 - 4x + 1)$.
- $10x^2 + 25x + 15 = 5(2x^2 + 5x + 3)$.
- $9t^3 - 6t^2 + 12t^8 - 18t^9 = 3t^2(3t - 2 + 4t^6 - 6t^7)$.
- $3x(x+1) + 5(x+1) = (x+1)(3x+5)$. Aquí el factor común es el binomio $(x+1)$ que está en ambos términos.
- $x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2)$. Sacar factor común nos permitió obtener una diferencia de cuadrados y seguir factorizando.
- $x^3 - 12x^2 + 36x = x(x^2 - 12x + 36) = x(x-6)^2$. Sacar factor común nos permitió obtener un trinomio cuadrado perfecto y seguir factorizando. «

Ejemplo 68. **Cualquier constante no nula como factor común.** Si consideramos el polinomio $p(x) = 3x^2 - 12x + 6$, es claro que podemos extraer al 3 como factor común:

$$3x^2 - 12x + 6 = 3(x^2 - 4x + 2).$$

Los coeficientes que quedan en el polinomio entre paréntesis son los coeficientes del polinomio original divididos por 3, de manera que al hacer la distributiva se recupera lo que está a la izquierda de la igualdad. Pero si podemos dividir cada coeficiente por 3, entonces podemos dividir por cualquier otro número que se desee, siempre que no sea cero:

$$3x^2 - 12x + 6 = 6\left(\tfrac{1}{2}x^2 - 2x + 1\right) = -4\left(-\tfrac{3}{4}x^2 + 3x - \tfrac{3}{2}\right).$$

En otras palabras, aunque el aspecto del resultado quizás "empeore",

todo polinomio p es divisible por cualquier polinomio de grado cero.

En particular, **siempre es posible factorizar un polinomio (no constante) dado, como producto entre una constante y un polinomio mónico (es decir, uno con coeficiente principal igual a 1).** Por ejemplo:

$$2x^2 - x + 5 = 2\left(x^2 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{5}{2}\right),$$
$$\pi x^5 + 2x^3 - x + \sqrt{2} = \pi\left(x^5 + \tfrac{2}{\pi}x^3 - \tfrac{1}{\pi}x + \tfrac{\sqrt{2}}{\pi}\right).$$

Así, cada polinomio puede factorizarse como el producto entre una constante y uno o más polinomios mónicos:

$$2x^3 + 3x^2 = x^2(2x + 3) = 2(x^2)\left(x + \frac{3}{2}\right). \qquad \ll$$

Aunque en algunos textos suele considerarse el último miembro en la expresión anterior como la factorización *completa* del polinomio dado, no exigiremos aquí que cada factor sea mónico.

Ejemplo 69. **Factor común en grupos.** A veces nos encontramos con un cuatrinomio que no tiene un factor común a todos sus términos, pero tiene uno que es común a dos de ellos, y otro factor común a los otros dos. Antes de describirlo veamos un ejemplo que ilustra el método:

$$\underbrace{4x^3 - 4x^2}\underbrace{+2x - 2} = 4x^2(x-1) + 2(x-1) = (x-1)(4x^2+2).$$

$4x^2$ es factor común de estos dos términos

2 es factor común de estos dos términos

$(x-1)$ es factor común de ambos términos

Este caso especial de extraer factores comunes se llama "factor común en grupos" porque se agrupan ciertos términos para sacar factor común entre ellos. Dado un cuatrinomio, la forma de agrupar los términos no es casual, sino que se eligen de manera que el resultado permita obtener nuevamente un factor común en el binomio resultante. El polinomio de partida también puede tener 6 términos, o cualquier otro número par de términos, pero no es tan sencillo darse cuenta de cómo armar los grupos en estos casos. «

Describiremos a continuación un método de factorizar un polinomio que incluye a algunos de los presentados antes. Es importante entender que aún cuando muchos de ellos puedan factorizarse con el método que sigue, manejar los casos "con nombre" que estudiamos antes ahorrará tiempo y cálculos. Es decir, aunque sea posible factorizar varios de los ejemplos anteriores mediante el método que presentaremos a continuación, siempre es más sencillo y rápido hacerlo como se ilustró.

Recordemos que para factorizar un polinomio hay que hallar sus divisores, es decir, polinomios tales que al dividir el polinomio por ellos, el resto sea cero. Existe un teorema* que nos permite saber cuánto es el resto de dividir un polinomio (de grado al menos 1) por un binomio de la forma $x-r$, siendo r un número real:

Teorema del resto: El resto de dividir un polinomio p, con $\text{gr}(p) \geq 1$, por el binomio $x - r$ es igual a $p(r)$.

Ejemplo 70. **Aplicando el teorema del resto.** Sea $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 4$.

- El resto de dividir p por $x - 4$ será $p(4) = 80$.
- El resto de dividir p por $x+2$ será $p(-2) = -22$ (notar que $x+2 = x-(-2)$, por lo que $r = -2$).
- El resto de dividir p por $x + 1$ será $p(-1) = 0$.
- El resto de dividir p por x será $p(0) = 4$. «

Volvamos a nuestro objetivo: buscamos dividir p por un polinomio tal que el resto sea cero. Por el teorema del resto, al dividir p por $x - r$ el resto es $p(r)$. Entonces el binomio $x - r$ será divisor de p si y solo si $p(r) = 0$. Este resultado se conoce como **teorema del factor**, ya que en otras palabras dice que:

El binomio $(x - r)$ es factor del polinomio p si y solo si $p(r) = 0$.

*En matemática llamamos **teorema** a una proposición que afirma una verdad demostrable.

Recordemos que un valor r que satisface $p(r) = 0$ es llamado raíz (o cero) del polinomio p. Entonces, el teorema del factor dice que p tendrá un factor de la forma $x - r$ si y solo si r es raíz de p.

Nuestro objetivo se transforma entonces en encontrar, si las tiene, raíces reales de un polinomio dado. Para esto contamos afortunadamente con otro teorema, el cual será la clave para nuestro propósito.

Teorema de la raíz racional: Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio con todos sus coeficientes enteros, con a_0 y a_n no nulos. Si p tiene una raíz racional r, entonces r es de la forma $\frac{m}{k}$, siendo m divisor de a_0 y k divisor de a_n.

El teorema anterior dice "si el polinomio tiene una raíz racional, entonces es de tal forma", pero puede que no tenga raíces racionales o de hecho que no tenga raíces reales, a pesar de tener coeficientes enteros:

- $p(x) = x^2 - 2$ tiene como raíces a $\pm\sqrt{2}$, pues $p(\pm\sqrt{2}) = 2 - 2 = 0$, y puede verse que son las únicas*, por lo tanto no tiene raíces racionales.
- $q(x) = x^2 + 2$ no tiene raíces reales, pues $r^2 \geq 0$ para todo r real, entonces $q(r) = r^2 + 2 \geq 2$ y por lo tanto no es cero para ningún real r.

En este texto trabajaremos con polinomios que sí tengan raíces racionales, para poder aplicar este método.

Ejemplo 71. **Buscando raíces racionales.** Sea $p(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6x - 3$. Si p tiene raíces racionales, entonces serán de la forma $\frac{m}{k}$, siendo m divisor de -3 y k divisor de 2. Entonces:

- las posibilidades para m son: 1, -1, 3 y -3;
- las posibilidades para k son: 1, -1, 2 y -2.

Entonces las posibles raíces racionales son las combinaciones de $\frac{m}{k}$, las cuales son

$$\pm 1, \quad \pm 3, \quad \pm\tfrac{3}{2}, \quad \pm\tfrac{1}{2}.$$

Por supuesto, siempre es conveniente comenzar probando con las posibles raíces enteras:

$$p(1) = 2 - 5 + 6 - 3 = 0,$$

y así tuvimos suerte y encontramos que $r = 1$ es raíz de p, por lo que $x - 1$ es factor de p. Podemos ver que los demás valores posibles no son raíces de p. «

*Demostrar esta afirmación escapa a los contenidos de este manual, pero proviene del hecho que un polinomio de grado n no puede tener más de n raíces.

Resumiendo el método, buscamos números reales r tales que $p(r) = 0$. Si el polinomio tiene coeficientes enteros, probaremos aquí con números de la forma $r = \frac{m}{k}$, siendo m divisor del término independiente y k divisor del coeficiente principal. Si lo hallamos, $x - r$ será factor de p, y podremos factorizar $p(x) = c(x)(x - r)$, siendo $c(x)$ el cociente que puede hallarse aplicando la regla de Ruffini.

Ejemplo 72. **Factorizando un polinomio.** Factorizar el polinomio

$$p(x) = 2x^3 - 5x^2 + 6x - 3.$$

Solución: En el ejemplo anterior vimos que $r = 1$ es raíz de p, lo que implica que el binomio $x - 1$ es divisor de p. Apliquemos entonces la regla de Ruffini para efectuar la división:

$$\begin{array}{r|cccc} & 2 & -5 & 6 & -3 \\ 1 & & 2 & -3 & 3 \\ \hline & 2 & -3 & 3 & 0 \end{array}$$

Como se esperaba, el resto es cero por lo que

$$2x^3 - 5x^2 + 6x - 3 = (2x^2 - 3x + 3)(x - 1).$$ «

Ejemplo 73. **Factorizando un polinomio.** Factorizar completamente (es decir, seguir factorizando mientras sea posible) el polinomio $q(x) = x^4 - 9x^2 + 4x + 12$.

Solución: Como el coeficiente principal de q es 1, las posibles raíces racionales son todas enteras y estarán dadas por los divisores del término independiente, 12. Entonces, debemos probar con los valores ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6 y ± 12, para ver si alguno es raíz de q:

$$q(1) = 8, \quad ✗ \qquad q(-1) = 0. \quad ✓$$

Hacemos entonces la división por $x + 1$ utilizando la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|ccccc} & 1 & 0 & -9 & 4 & 12 \\ -1 & & -1 & 1 & 8 & -12 \\ \hline & 1 & -1 & -8 & 12 & 0 \end{array}$$

Como esperábamos, el resto es cero por lo que

$$q(x) = (x^3 - x^2 - 8x + 12)(x + 1).$$

Pero se pide que lo factoricemos por completo, lo que significa que debemos ver si el factor $c(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$ puede a su vez factorizarse. Probando con los mismos valores que antes, vemos que $c(2) = 0$, por lo que haremos $c(x) : (x-2)$ mediante la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -8 & 12 \\ 2 & & 2 & 2 & -12 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

Entonces $x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x^2 + x - 6)(x - 2)$, por lo que

$$q(x) = (x^3 - x^2 - 8x + 12)(x + 1) = (x^2 + x - 6)(x - 2)(x + 1).$$

Pero $x^2 + x - 6$ aún se puede factorizar, pues su valor numérico en 2 es cero, por lo que aplicamos la regla de Ruffini por tercera vez para realizar el cociente $(x^2 + x - 6) : (x - 2)$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 1 & -6 \\ 2 & & 2 & 6 \\ \hline & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

Luego $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$ y, en consecuencia,

$$q(x) = (x + 3)(x - 2)(x - 2)(x + 1) = (x + 3)(x - 2)^2(x + 1). \quad \ll$$

Una **raíz múltiple** de un polinomio es una raíz que ocurre más de una vez. En el ejemplo anterior el factor $(x - 2)$ aparece dos veces en la factorización de q, así que $r = 2$ es una raíz múltiple. Puesto que ocurre dos veces, se llama una **raíz doble**. Si ocurriera solamente una vez es llamada **raíz simple**. Si ocurre tres veces se denomina **raíz triple**, y así sucesivamente. La cantidad de veces que ocurre una raíz se llama **orden de multiplicidad**, o simplemente **multiplicidad** de dicha raíz*.



Una pregunta natural en este punto es ¿cómo nos damos cuenta si el polinomio está completamente factorizado? Es decir, ¿hasta cuándo seguimos? En el ejemplo anterior es claro que terminamos ya que llegamos a todos factores de

*En términos matemáticos, se dice que una raíz r de p tiene multiplicidad k si podemos factorizar $p(x) = (x - r)^k s(x)$, siendo $s(x)$ un polinomio tal que $s(r) \neq 0$. Es decir, $(x - r)^k$ es factor de p pero $(x - r)^{k+1}$ no lo es.

grado 1, por lo que más que eso no podemos hacer. Sin embargo, con factores de mayor grado no es tan claro darse cuenta si se puede seguir o si ya no tiene más raíces reales. Si bien no hay una receta para responder esta pregunta que esté dentro del alcance de este libro, la idea que servirá para abordar los ejercicios de este manual es la siguiente:

- Intentar aplicar cada uno de los métodos descriptos.
- Si se llega a un polinomio de grado 2, existe un criterio para saber si se puede o no seguir factorizando. Este criterio, al igual que una fórmula para determinar sus raíces aún cuando no sean racionales, será estudiado en el Capítulo 4. Allí se presenta un análisis que justifica la siguiente afirmación, que nos dice cuándo podremos factorizar a un polinomio de grado 2:

$p(x) = ax^2 + bx + c$ tiene raíces reales si y solo si $b^2 - 4ac \geq 0$.

Ilustremos esto con dos polinomios ya vistos.

Ejemplo 74. **Criterio de parada para polinomios cuadráticos.** En el Ejemplo 73 obtuvimos a $x^2 + x - 6$ como factor del polinomio original. En este polinomio,

$$a = 1, \quad b = 1 \quad \text{y} \quad c = -6.$$

Entonces $b^2 - 4ac = 1 + 24 = 25 > 0$, por lo que la afirmación anterior dice que podemos seguir factorizando. Esto coincide con lo hecho, ya que lo logramos escribir como $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$.

Por otro lado, en el Ejemplo 72 uno de los factores era $2x^2 - 3x + 3$. En este polinomio

$$a = 2, \quad b = -3 \quad \text{y} \quad c = 3,$$

por lo que $b^2 - 4ac = 9 - 24 = -15 < 0$, lo que indica que ya no tiene raíces reales y la factorización ha finalizado, es decir, que en dicho ejemplo ya habíamos completado la factorización. «

El siguiente ejemplo, además de aplicar lo estudiado a un caso particular de polinomio, nos da una pauta más con respecto a saber cuándo hemos finalizado la factorización para polinomios no cuadráticos con una forma especial.

Ejemplo 75. **Suma o diferencia de potencias de igual grado.** Esto no es un método nuevo, sino que consiste en aplicar lo aprendido a un caso particular: factorizar binomios de la forma $x^n - r^n$ o $x^n + r^n$, siendo r un número real positivo, y n un natural. En realidad, como explicamos a continuación, lo "nuevo" aparece solo cuando n es impar.

- n par
  - Suma $x^n + r^n$. Cuando tenemos la *suma* de dos potencias con exponentes *pares*, entonces el polinomio ya está factorizado por completo en los reales. Por ejemplo, x^2+4. Esto se debe a que dicha suma es estrictamente positiva, por lo que no tiene raíces reales.
  - Resta $x^n - r^n$. Cuando tenemos la *resta* de dos potencias con exponentes *pares*, entonces estamos en realidad ante una diferencia de cuadrados, y se trabaja como ya lo vimos. Por ejemplo:

    $$x^8 - 3^8 = \left(x^4\right)^2 - \left(3^4\right)^2 = \left(x^4 - 3^4\right)\left(x^4 + 3^4\right).$$

    Notar que en lo anterior, $x^4 - 3^4$ puede a su vez factorizarse como

    $$x^4 - 3^4 = (x^2 - 3^2)(x^2 + 3^2) = (x-3)(x+3)(x^2+3^2),$$

    al reconocer dos veces más una diferencia de cuadrados. Así,

    $$x^8 - 3^8 = (x-3)(x+3)(x^2+3^2)\left(x^4+3^4\right).$$

Notar que los dos últimos factores son de la forma $x^n + r^n$ con n par y, por el caso anterior, no pueden factorizarse más.

- n impar
  - Suma $x^n + r^n$. Por ejemplo, consideremos

    $$p(x) = x^3 + 125 = x^3 + 5^3.$$

    Observar que $p(-5) = 0$, por lo que $(x - (-5)) = (x + 5)$ es divisor de p. Aplicando la regla de Ruffini tenemos:

    $$\begin{array}{r|cccc} & 1 & 0 & 0 & 125 \\ -5 & & -5 & 25 & -125 \\ \hline & 1 & -5 & 25 & 0 \end{array}$$

    Luego,

    $$x^3 + 5^3 = (x^2 - 5x + 25)(x+5).$$

  - Resta $x^n - r^n$. Consideremos ahora

    $$q(x) = x^5 - 32 = x^5 - 2^5.$$

    Notar que $q(2) = 0$, así que aplicamos la regla de Ruffini para dividir q por $(x-2)$:

	1	0	0	0	0	−32
2		2	4	8	16	32
	1	2	4	8	16	0

Entonces

$$x^5 - 2^5 = (x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)(x - 2).$$

Resumiendo, si n es **impar** entonces

$x^n + r^n$ es divisible por $x + r$,

$x^n - r^n$ es divisible por $x - r$.

Más aún, puede demostrarse que $-r$ es la *única* raíz real de $x^n + r^n$, mientras que r es la *única* raíz real de $x^n - r^n$. Entonces, el polinomio se encuentra **totalmente factorizado** una vez efectuada la división por los respectivos factores.

Si n es **par** entonces $x^n + r^n$ *no tiene* raíces reales, mientras que $x^n - r^n$ es una diferencia de cuadrados, y sus *únicas* raíces reales son r y $-r$. «

Finalizamos la sección enfatizando algo que ya se ha mencionado pero es de gran importancia:

¿Cómo saber si una factorización es correcta? Siempre es posible verificar si la factorización es correcta multiplicando los factores obtenidos y operando, para comprobar que se llega de esta forma al polinomio de partida. No debemos olvidar que al factorizar un polinomio se obtiene una expresión con distinta forma (multiplicación de polinomios), pero equivalente a la original.

Ejercicios 3.3

1. Factorizar las siguientes diferencias de cuadrados:

(a) $4x^2 - 49$

(b) $t^8 - 6$

(c) $25x^6 - 9$

(d) $36x^2 - 25$

2. Factorizar los siguientes trinomios cuadrados perfectos:

(a) $x^2 - 8x + 16$

(b) $9x^2 - 12x + 4$

(c) $4x^4 + 12x^2 + 9$

(d) $t^4 - 6t^3 + 9t^2$

3. Factorizar los siguientes cuatrinomios cubos perfectos:

(a) $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

(b) $x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8$

(c) $-x^3 + 3x^2 - 3x + 1$

(d) $8t^6 - 12t^4 + 6t^2 - 1$

4. Determinar m para que el resto de dividir $mx^5 - 2x^4 + 3x^2 - 7$ por el binomio $x - 1$ sea igual a 2.

5. Determinar k para que $x + 1$ sea factor de $5x^7 + 3x^4 + 2x^3 + x^2 + k$.

6. En el Ejemplo 69 se factorizó al polinomio $p(x) = 4x^3 - 4x^2 + 2x - 2$ extrayendo factor común por grupos. Rehacerlo buscando una raíz según el teorema del factor, y aplicando luego la regla de Ruffini para dividir.

7–20. Factorizar por completo los polinomios dados.

7. $3x^4 - 12x^2$

8. $3x^4 + 15x^2$

9. $x^3 - x^2 + 4x - 4$

10. $4x^3 - 4x^2 - 9x + 9$

11. $x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 3x$

12. $x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 2x - 8$

13. $2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$

14. $x^5 + 1$

15. $x^5 - 1$

16. $x^6 - 1$

17. $4x^4 - 64$

18. $3x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x - 40$

19. $2x^6 - 5x^5 - 3x^4$

20. $x^4 + 2x^3 - 21x^2 - 22x + 40$

Polinomios en GeoGebra

Para comenzar a usar GeoGebra, veamos cómo se ingresa un polinomio. Para ello usamos el campo de Entrada, en el cual podremos escribir si habilitamos el teclado, cliqueando en el símbolo del mismo. Si trabajamos en una computadora, este se encuentra en la esquina inferior izquierda:



y si se utiliza la aplicación para Android, se encuentra en el centro:



Al cliquear en el campo de Entrada aparece una barra con 4 opciones para teclados, y los puntos suspensivos al final:



La primera es la numérica y principal, la siguiente contiene funciones especiales, luego viene la pestaña para el teclado alfabético, y finalmente la de letras griegas. Al tocar los puntos suspensivos de la derecha se abre una lista con todos los comandos disponibles, donde se pueden seleccionar en lugar de escribirlos. En el teclado numérico se encuentra la tecla 

, que se utiliza para ingresar los exponentes*. La tecla 

es un caso particular, y es un acceso rápido para el exponente 2.

(a) Ingresar el polinomio $p(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ y presionar Enter  (la letra p se ingresa desde el teclado alfabético, y el resto desde el numérico. Si se ingresa solamente la expresión del lado derecho, el software le asigna por defecto el nombre f). Aparecerá un gráfico en la parte superior, el cual cobrará sentido a partir del Capítulo 5. Por el momento nos ocuparemos solamente del resultado algebraico que arroja el software, y no del gráfico.

(b) Ingresar el polinomio $q(x) = x - 1$ (siempre presionar Enter luego de cada instrucción).

(c) Escribir $p(4)$ para hallar el valor numérico de p en $x = 4$.

(d) Escribir p+q para sumar los polinomios, y p-q para restarlos.

(e) Para dividir dos polinomios, se ingresa División(p,q), siendo el primero el dividendo y el segundo el divisor. Como resultado se obtiene lo que se conoce como "lista", en la que el primer elemento es el cociente, y el segundo es el resto. Comprobarlo ingresando División(p,q) para hacer $p(x) : q(x)$ y también División(p,x^2+x) para hacer $p(x) : (x^2 + x)$. Determinar en cada caso el cociente y el resto.

*Si se utiliza una computadora, los exponentes se introducen también con la tecla 

. Por ejemplo, escribiendo x^3 se ingresa x^3.

(f) Escribir Raíz(p) para hallar las raíces del polinomio p. El software devolverá el resultado en la forma (r,0), para cada raíz del polinomio. Esta notación también tendrá sentido a partir del Capítulo 5, por el momento nos quedaremos con los valores de r. Una vez halladas, comprobar usando GeoGebra que $p(r) = 0$, para cada una de las raíces obtenidas.

(g) Ingresar Factoriza(p) para obtener la forma factorizada del polinomio p. Comparar con el resultado obtenido en el Ejemplo 61.

(h) Un comando similar al anterior es Factores(p). El resultado es una lista con los polinomios que son factores de p, y al lado un número natural que indica la multiplicidad de cada factor. Utilizar este comando para obtener los factores del polinomio $x^4-9x^2+4x+12$, y su correspondiente multiplicidad. Comparar con lo obtenido en el Ejemplo 73.

(i) Utilizar el comando Factores para comprobar que $x + 1$ es factor del polinomio del Ejercicio 5, para el valor de k hallado.

(j) El comando Resto(p,q) devuelve el resto de la división entre el polinomio p y el polinomio q. Utilizar este comando para comprobar que el resto de dividir el polinomio del Ejercicio 4 (con el valor m hallado) por el binomio $x - 1$ es igual a 2.

(k) Utilizar el comando Factoriza para factorizar por completo el polinomio $5x^4-117x^3+994x^2-3600x+4608$. Luego, utilizar lo obtenido y el comando División para expresar el polinomio dado como el producto de un polinomio de grado 3 y otro de grado 1.

(l) Utilizar el comando Factoriza para factorizar por completo el polinomio $f(x) = 27x^3 + 135x^2 + 225x + 125$. De acuerdo a lo obtenido, ¿qué nombre recibe f? ¿Qué binomio lo origina?

3.4. Expresiones racionales

Una **expresión racional**, o también conocida como **fracción algebraica**, es un cociente de polinomios. Es decir, es algo de la forma

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

donde p y q son polinomios. Esta expresión tendrá sentido para todos aquellos valores de x tales que $q(x) \neq 0$, pues la división por cero no está definida. Los valores de x que anulan a q son valores no permitidos para la fracción algebraica, e imponen lo que se conoce como **restricciones** para la misma. El **dominio** de una fracción algebraica es el conjunto de todos los valores permitidos, es decir, aquellos que no anulan al denominador.

Ejemplo 76. **Restricciones para fracciones algebraicas.** Las siguientes son expresiones racionales:

$$\frac{3x+6}{9x^2-9x-54}, \qquad \frac{x}{x^2+1}.$$

Observar que la primera está definida para $x \neq -2$ y $x \neq 3$, que son los valores que anulan al denominador. La segunda, en cambio, está definida para todo número real, pues el denominador nunca se anula. En otras palabras, los valores no permitidos para la primera expresión racional son $x = -2$ y $x = 3$, mientras que para la segunda no hay restricciones. «

Las expresiones racionales se **simplifican** factorizando los polinomios involucrados para luego "cancelar" los factores comunes tanto al numerador como al denominador:

$$\frac{a\cancel{c}}{b\cancel{c}} = \frac{a}{b}, \text{ para todo } c \neq 0.$$

Será fundamental no perder de vista los valores no permitidos para la variable, ya que algunos de ellos pueden olvidarse durante el proceso de simplificación (al cancelar c en la fórmula anterior). Ilustramos esto en los ejemplos.

Una fracción algebraica es **irreducible** o está en su **mínima expresión** cuando el numerador y el denominador no tienen factores comunes a excepción de las constantes. Notar que, con esta definición, si se multiplica el numerador y denominador de una fracción algebraica irreducible por una misma constante distinta de cero, se obtiene otra fracción irreducible equivalente. Por ejemplo:

$$\frac{6x+12}{4x+2} = 3 \cdot \frac{x+2}{2x+1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{x+2}{x+\frac{1}{2}},$$

y según la definición dada, cualquiera de estas fracciones es irreducible. A pesar de ello, la del medio suele ser más "frecuente" de encontrar al momento de simplificar fracciones algebraicas. Esto se debe a que el procedimiento usual consiste en extraer por un lado el mayor *entero* factor común a todos los coeficientes del polinomio del numerador (en el ejemplo de arriba es 6), luego se hace lo mismo para el denominador (en este caso es 2), y finalmente se simplifican estos factores, si es posible (en este caso, $\frac{6}{2} = 3$). La tercera fracción se obtiene si se exige que tanto el numerador como el denominador sean polinomios mónicos, o un producto de ellos. Aunque esto sí genera unicidad en la forma reducida de una fracción algebraica, también haría, por ejemplo, que la mínima expresión de

$$\frac{3\pi x+12}{\sqrt{2}x+1} \quad \text{sea} \quad \frac{3\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x+\frac{4}{\pi}}{x+\frac{1}{\sqrt{2}}},$$

OPCIONAL

la cual no parece "más simple" que la primera. En cambio, puede lograr que la forma simplificada de

$$\frac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}} \quad \text{sea} \quad 2\cdot\frac{x+1}{x-1},$$

la cual sí puede resultar "más simple", porque solo aparecen coeficientes enteros. Esto es, entonces, un criterio estético en lugar de formal, por lo que quedará a gusto de cada uno. Esta ambigüedad sucede solamente al nivel de las constantes, ya que el máximo común divisor de dos polinomios se define como único salvo factores constantes*. Dejaremos esto de lado ya que lo importante del proceso de simplificación se comprenderá mejor mediante los ejemplos.

OPCIONAL

Ejemplo 77. **Simplificando una expresión racional.** Simplificar la siguiente expresión racional, indicando los valores no permitidos para la variable:

$$\frac{x^3-4x}{x^3+3x^2-10x}.$$

Solución: Comenzamos factorizando tanto el numerador como el denominador, para luego cancelar:

$$\begin{aligned}\frac{x^3-4x}{x^3+3x^2-10x} &= \frac{x(x^2-4)}{x(x^2+3x-10)}\\ &= \frac{x(x-2)(x+2)}{x(x-2)(x+5)} \qquad x\neq 0;\ x\neq 2;\ x\neq -5\\ &= \frac{\cancel{x(x-2)}(x+2)}{\cancel{x(x-2)}(x+5)}\\ &= \frac{x+2}{x+5}.\end{aligned}$$

Los valores no permitidos para x deben determinarse siempre **antes de cancelar términos**, en la expresión original. Puesto que la forma factorizada es equivalente a la expresión original, es más sencillo ver allí cuáles son los valores que anulan el denominador. En este caso, las restricciones son:

$$x\neq 0, \quad x\neq 2 \quad \text{y} \quad x\neq -5. \qquad \ll$$

La expresión simplificada es igual a la original **excepto** para aquellos valores en los que el factor que se cancele sea igual a cero. Para comprender esto, en la expresión racional del ejemplo anterior es incorrecto escribir

$$\frac{x^3-4x}{x^3+3x^2-10x}=\frac{x+2}{x+5}, \qquad \times$$

*Ver `https://en.wikipedia.org/wiki/Polynomial_greatest_common_divisor`. Consultado en noviembre de 2018.

ya que la expresión de la izquierda no puede evaluarse en $x = 0$ ni en $x = 2$, mientras que la de la derecha sí. Lo correcto es escribir

$$\frac{x^3 - 4x}{x^3 + 3x^2 - 10x} = \frac{x+2}{x+5}, \quad \text{para } x \neq 0,\ x \neq 2,\ x \neq -5, \qquad \checkmark$$

estableciendo de esta forma los valores no permitidos para la expresión original, incluso los que "no se ven" en la expresión simplificada de la derecha. Aunque en esta última sí puede verse la restricción $x \neq -5$, es conveniente recordarla de todas formas en la lista, junto a las restricciones "perdidas".

 El comando Simplifica en GeoGebra puede usarse para reducir expresiones racionales. Por ejemplo, ingresando

Simplifica((x^3-4x)/(x^3+3x^2-10x))

se obtiene como resultado $\frac{x+2}{x+5}$, como en el ejemplo anterior. Además, los valores no permitidos pueden obtenerse escribiendo Raíz(x^3+3x^2-10x), lo que devuelve aquellos que hacen que el denominador se anule.

Ejemplo 78. Reducir a su mínima expresión, indicando las restricciones:

$$\frac{2x^2 - 12x - 14}{4x^2 + 8x + 4}.$$

Solución: Comenzamos factorizando tanto el numerador como el denominador, para luego cancelar:

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 - 12x - 14}{4x^2 + 8x + 4} &= \frac{2(x^2 - 6x - 7)}{4(x^2 + 2x + 1)} \\ &= \frac{2\cancel{(x+1)}(x-7)}{4\cancel{(x+1)}(x+1)} \qquad x \neq -1 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{x-7}{x+1}. \end{aligned}$$

La única restricción es $x \neq -1$. «

Para **operar** con fracciones algebraicas se procede de la misma forma que para las fracciones numéricas. Cualquier operación resultará más sencilla si antes de efectuarla se simplifican las fracciones algebraicas involucradas, pero con un poco más de trabajo también se puede simplificar al final. Las restricciones (es decir, los valores no permitidos) para la operación corresponden a la unión de las restricciones de cada una de las fracciones involucradas. Es decir, se da por supuesto que se trabaja con valores que no anulan ninguno de los denominadores de las fracciones dadas.

- La **suma** (o **resta**) de fracciones algebraicas con el mismo denominador es otra fracción algebraica con el mismo denominador y cuyo numerador es la suma (o resta) de los numeradores. Si tienen denominador distinto, primero se las transforma en fracciones con denominador común (para lo cual es conveniente factorizar los denominadores), y luego se efectúa la suma o resta.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}, \qquad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{db}.$$

- El **producto** de fracciones algebraicas es otra fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores de las fracciones que estamos multiplicando, y cuyo denominador es el producto de los denominadores. Luego de resolver, se simplifica si es posible la fracción resultante.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

- El **cociente** de dos fracciones algebraicas es el producto de la primera por el inverso o recíproco de la segunda:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

Ilustramos las operaciones entre fracciones algebraicas en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 79. **Suma y resta de expresiones racionales.** Resolver:

- $\dfrac{x+2}{x^2-4}+\dfrac{x-3}{x^2-9}$,
- $\dfrac{x}{x^2+x}-\dfrac{2-x}{x^2-1}$.

Solución: Recordemos que siempre es más fácil simplificar las expresiones que aparecen, y luego realizar las operaciones. Para la primera tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{x+2}{x^2-4}+\frac{x-3}{x^2-9} &= \frac{x+2}{(x-2)(x+2)}+\frac{x-3}{(x-3)(x+3)} && \text{se factorizó}\\
&= \frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+3} && \text{se canceló} \quad x\neq -2,\ x\neq 3\\
&= \frac{(x+3)+(x-2)}{(x-2)(x+3)} && \text{se sumaron las fracciones}\\
&= \frac{2x+1}{(x-2)(x+3)} && \text{se operó en el numerador.}
\end{aligned}$$

☞ Los valores prohibidos para las operaciones con fracciones algebraicas son aquellos que anulan el denominador de alguna de las fracciones involucradas. Entonces las restricciones para la suma anterior son $x \neq \pm 2$ y $x \neq \pm 3$. Notar que si observamos las restricciones solamente en el resultado final, perdemos aquellas que anulaban a alguno de los denominadores porque fueron "canceladas" durante el proceso de simplificación. Esos valores se indican en color rojo en el procedimiento anterior, para recordar que deben incluirse en los valores no permitidos.

De forma similar procedemos para efectuar la resta:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x^2+x} - \frac{2-x}{x^2-1} &= \frac{x}{x(x+1)} - \frac{2-x}{(x-1)(x+1)} && \text{se factorizó} \\
&= \frac{1}{(x+1)} - \frac{2-x}{(x-1)(x+1)} && \text{se canceló} \quad x \neq 0 \\
&= \frac{(x-1)-(2-x)}{(x-1)(x+1)} && \text{se restaron las fracciones} \\
&= \frac{2x-3}{(x-1)(x+1)} && \text{se operó en el numerador.}
\end{aligned}$$

Las restricciones para esta resta son entonces $x \neq \pm 1$ y $x \neq 0$. «

Ejemplo 80. **Producto y cociente de expresiones racionales.** Resolver:

- $\dfrac{x-3}{x^2+6x+9} \cdot \dfrac{x^2+3x}{x^2-9}$,
- $\dfrac{2}{x+5} : \dfrac{1}{x^2-25}$.

Solución:

- $$\begin{aligned}\frac{x-3}{x^2+6x+9} \cdot \frac{x^2+3x}{x^2-9} &= \frac{\cancel{x-3}}{(x+3)^2} \cdot \frac{x\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x-3)}\cancel{(x+3)}} \\ &= \frac{x}{(x+3)^2}.\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\frac{2}{x+5} : \frac{1}{x^2-25} &= \frac{2}{x+5} \cdot (x^2-25) \\ &= \frac{2}{\cancel{(x+5)}} \cdot \cancel{(x+5)} \cdot (x-5) = 2(x-5).\end{aligned}$$

☞ Para que ambas fracciones en el producto anterior estén definidas se necesita $x \neq \pm 3$. Para el cociente, la restricción es $x \neq \pm 5$ (aunque al resolver la división el denominador $x^2 - 25$ se transforme en numerador, la fracción involucrada en el enunciado debe estar bien definida). «

Ejemplo 81. **Errores graves y frecuentes.** Estos son algunos de los errores que suelen verse al operar con fracciones algebraicas. En el Ejercicio 1 se pide probar que lo efectuado es incorrecto.

- $\dfrac{\cancel{x^2}+x+2}{\cancel{x^2}+4} \neq \dfrac{x+2}{4}$, ✗
- $\dfrac{x^3}{x^2+5} \neq \dfrac{x^3}{x^2}+\dfrac{x^3}{5}$, ✗
- $\dfrac{2x-1}{x^3}+\dfrac{x^2}{x+1} \neq \dfrac{2x-1+x^2}{x^3+x+1}$. ✗

«

Ejercicios 3.4

1. Hallar valores adecuados para x que demuestren que los procedimientos efectuados en el Ejemplo 81 son incorrectos.

2. Simplificar las siguientes expresiones racionales a su mínima expresión, indicando los valores no permitidos para la variable:

(a) $\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$

(b) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}$

(c) $\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^3-2x^2-x+2}$

(d) $\dfrac{4x^2-1}{4x^2+4x+1}$

3. Utilizar el comando Simplifica para verificar lo obtenido en el ejercicio anterior.

4. Realizar las operaciones indicadas y simplificar el resultado. Establecer las restricciones en cada caso:

(a) $\dfrac{x^3-3x-10}{x^2-4x+4} \cdot \dfrac{x-2}{x-5}$

(b) $\dfrac{3x+3}{x^2-1} : \dfrac{x+1}{x^2-2x+1}$

(c) $\dfrac{3x-2}{x^2-1}+\dfrac{x+2}{x-1}$

(d) $\dfrac{2x}{9x^2-16}-\dfrac{x+1}{(3x-4)^2}$

(e) $\dfrac{3}{2x+4}+\dfrac{2x}{x^2-4}$

(f) $x-\dfrac{x^2-1}{x}$

(g) $\dfrac{x-2}{x+2}+\dfrac{x+2}{x-2}$

(h) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2x}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}$

Capítulo 4

Ecuaciones e inecuaciones

4.1. El lenguaje matemático

Innumerables situaciones correspondientes a diversas áreas y hechos cotidianos pueden ser modeladas mediante ecuaciones e inecuaciones. Para resolver un problema matemáticamente, el primer paso es traducirlo del lenguaje ordinario al lenguaje algebraico. Este es precisamente el objetivo de esta sección: traducir una situación concreta al lenguaje matemático, transformándola en una ecuación, inecuación o un sistema de ellas (cómo resolver el planteo obtenido será el objetivo de las siguientes secciones).

Antes de "traducir" problemas concretos, comencemos expresando cosas más simples. En la siguiente lista se escriben en lenguaje matemático algunas frases frecuentes. Comprender esta forma de expresarlas será fundamental para el planteo de problemas específicos.

- El doble de un número $x \rightsquigarrow 2x$
- Las tres cuartas partes de un número $x \rightsquigarrow \frac{3}{4}x$
- Se aumenta en 5 al triple de un número $y \rightsquigarrow 3y + 5$
- El triple del número y, más $5 \rightsquigarrow 3y + 5$
- El triple del número y más $5 \rightsquigarrow 3(y + 5)$
- La mitad del consecutivo de un número entero $x \rightsquigarrow \frac{1}{2}(x + 1)$
- El cuadrado de la mitad de un número $z \rightsquigarrow \left(\frac{z}{2}\right)^2$
- El número x supera al número y en 30 unidades $\rightsquigarrow x = y + 30$*
- Un número entero x más su consecutivo $\rightsquigarrow x + (x + 1)$

*Es frecuente ver que esta expresión es traducida como $x + 30 = y$. Este error puede evitarse pensando que si el número x supera a y, significa que y es más pequeño, por lo que hay que sumarle a él la cantidad necesaria para igualar a x.

Ahora sí, plantearemos en lenguaje algebraico algunas situaciones concretas.

Ejemplo 82. **Usando el lenguaje matemático.** Si al doble de un número se le resta su mitad resulta 84. ¿Cuál es el número?

Solución: Llamemos x al número buscado (este paso es fundamental, es decir, antes de comenzar a plantear un problema se debe indicar siempre qué representa cada letra o símbolo utilizado). En el enunciado aparecen involucrados el doble del número, es decir $2x$, y también su mitad $\frac{x}{2}$, y establece que

$$2x - \frac{x}{2} = 84.$$

En la sección siguiente veremos cómo resolver la igualdad anterior, por ahora solamente nos centraremos en el planteo. «

Ejemplo 83. En un avión viajan 420 pasajeros de tres nacionalidades: argentinos, uruguayos y chilenos. Hay 40 chilenos más que uruguayos, y de argentinos hay el doble que de uruguayos y chilenos juntos. ¿Cuántos hay de cada país?

Solución: Denotemos con y a la cantidad de uruguayos que viajan en el avión. Entonces la cantidad de chilenos es $y + 40$, y la cantidad de argentinos se representa como $2(y + (y + 40))$. Luego, la traducción algebraica del problema es

$$y + (y + 40) + 2(y + (y + 40)) = 420.$$ «

👉 El planteo matemático de algunos problemas es más sencillo si trabajamos con más de una incógnita. Este es el caso de las siguientes situaciones.

Ejemplo 84. **Usando más de una incógnita.** Hallar la medida de los lados de un rectángulo cuyo perímetro es 24 unidades, y cuyo lado mayor mide el triple que su lado menor.

Solución: Para traducir esta situación al lenguaje matemático, podemos llamarle x a la longitud del lado menor del rectángulo, e y a la del lado mayor. Puesto que su perímetro es 24, sabemos que

$$2x + 2y = 24. \qquad (A)$$

Además se afirma que el lado mayor mide el triple que el menor, es decir

$$y = 3x. \qquad (B)$$

Las dos igualdades (A) y (B) deben cumplirse simultáneamente. Esto se conoce con el nombre de "sistema de ecuaciones", y su resolución será estudiada en la Sección 4.4. «

Ejemplo 85. Determinar las edades de dos personas sabiendo que la suma de sus edades hoy es de 64 años, y que dentro de 8 años el mayor tendrá el triple de edad que el menor.

Solución: Llamemos x a la edad que tiene hoy la persona menor, e y a la edad que tiene hoy la mayor. Sabemos que

$$x + y = 64. \quad (a)$$

La edad de cada una dentro de 8 años es $x + 8$ e $y + 8$, respectivamente. En ese momento, el mayor tendrá el triple que el menor, por lo que para que sean iguales hay que multiplicar la edad del menor por 3 (o dividir a la del mayor por 3). Es decir

$$3(x + 8) = y + 8. \quad (b)$$

Al igual que antes, las igualdades (a) y (b) deben cumplirse a la vez. «

Finalmente, veremos problemas en los que aparecen una o más desigualdades en lugar de una igualdad, las cuales reciben el nombre de inecuaciones, y serán estudiadas en detalle en secciones posteriores.

Ejemplo 86. **Usando desigualdades.** Si al doble de la edad de Jeremías se le resta 19 años, el resultado es menor que 37. Pero si al tercio de su edad se le suma 10, entonces el resultado es mayor que 18. ¿Cómo se expresan mediante desigualdades estas expresiones?

Solución: Si llamamos x a la edad de Jeremías, el enunciado afirma las dos condiciones siguientes:

$$2x - 19 < 37 \qquad \text{y} \qquad \frac{x}{3} + 10 > 18. \quad «$$

En las secciones siguientes nos ocuparemos de resolver los planteos anteriores: ecuaciones, inecuaciones y sistemas.

Ejercicios 4.1

Expresar en lenguaje matemático las siguientes situaciones problemáticas (no resolverlas). Recordar definir siempre la/s variable/s involucrada/s, es decir, siempre se debe indicar qué representa cada letra utilizada.

1. El kilo de manzanas cuesta el doble que el kilo de limones. Si por 3 kilos de manzanas y 5 kilos de limones se pagó $\$165$, ¿cuánto cuesta el kilo de cada uno?

2. Tres hermanos se reparten 1300 pesos. El mayor recibe el doble que el mediano quien, a su vez, recibe el cuádruple que el pequeño. ¿Cuánto recibe cada uno?

3. En un estadio de fútbol hay 43200 personas. Si sabemos que hay 4800 locales más que visitantes, ¿cuántos locales y cuántos visitantes hay?

4. Se han consumido las $7/8$ partes de un bidón de agua. Añadiendo 38 litros se llena hasta las $3/5$ partes. Calcular la capacidad del bidón.

5. Agustín hizo un viaje en su auto, en el cual consumió 20 litros de nafta. El trayecto lo hizo en dos etapas: en la primera, consumió $2/3$ de la nafta que tenía el tanque, mientras que en la segunda etapa consumió la mitad de la nafta que le quedaba en el tanque luego de la primera. Hallar una igualdad para determinar los litros de nafta que tenía Agustín en el tanque antes de partir.

4.2. Resolución de ecuaciones

Si se comprende el proceso que se utiliza, resolver ecuaciones puede ser más simple de lo que uno imagina. Comencemos recordando qué es una ecuación.

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones conteniendo uno o más valores desconocidos.

Las expresiones que aparecen a ambos lados del símbolo = (igual) se llaman **miembros** de la ecuación.

Aprenderemos a resolver ecuaciones que tengan solamente un valor desconocido. Al valor desconocido se lo llama **incógnita**, y se lo suele denotar con x, pero puede representarse con cualquier otra letra.

Antes de ver cómo resolver ecuaciones, hay que entender qué significa esto. **Resolver** una ecuación es simplemente hallar el valor (o los valores) de la incógnita, de manera que la igualdad sea cierta si reemplazamos dicha incógnita por cualquiera de los valores hallados. Dependiendo del caso, el valor buscado puede ser único, pueden existir varios valores que hagan la igualdad cierta, o puede ocurrir que no exista ninguno. Cualquier valor que haga cierta la igualdad se llama **solución** de la ecuación. Luego, una ecuación puede tener una única solución, varias o ninguna, y es llamada **identidad** cuando es verdadera para cualquier valor de la incógnita. Cuando la ecuación esté modelando un problema concreto, habrá que elegir entre todas las soluciones de la ecuación, aquellas que tengan sentido en el contexto del problema, y descartar las que no lo tengan (ver Ejemplo 112).

Notar que siempre es posible saber por nuestra cuenta si hemos resuelto correctamente la ecuación. Por ejemplo, para saber si $x = 1$ es solución de la ecuación

$$x + 3 = 5 - x,$$

podemos reemplazar x por 1 en ambos lados de la igualdad (miembros) para obtener

$$1 + 3 = 5 - 1,$$

lo cual es cierto ya que el resultado es 4 en ambos.

El procedimiento anterior se denomina **verificación**, y consiste en comprobar que la igualdad se cumple al reemplazar la incógnita por el o los valores obtenidos.

Se dice que dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto de soluciones. Utilizaremos el símbolo $\iff$ (que se lee "si y solo si") para conectar dos ecuaciones que son equivalentes. La clave para resolver una ecuación es transformarla en ecuaciones equivalentes cada vez más simples, utilizando la **propiedad uniforme**. Esta propiedad establece que:

> Si se realiza la misma operación con el mismo número en ambos miembros de una ecuación, se mantiene la igualdad.

☞ La propiedad uniforme es la base para resolver ecuaciones, y es la que justifica lo que en lenguaje coloquial expresamos como "pasar" algo de un lado a otro de la igualdad. La palabra "pasar" simplemente abrevia una serie de pasos matemáticos utilizados con el fin de llegar a *despejar* la incógnita x. Por ejemplo, para resolver la ecuación

$$6(x-4)^3 - 15 = 33$$

lo primero que uno hace es "pasar" al otro lado el número 15 sumando. Pero, ¿por qué lo pasa sumando? Comprender esto es la clave para lograr resolver en forma correcta las ecuaciones. En realidad, matemáticamente lo que se hace es lo siguiente:

$$\begin{aligned} 6(x-4)^3 - 15 + 15 &= 33 + 15 && \text{sumar } 15 \text{ a ambos lados} \\ 6(x-4)^3 + 0 &= 33 + 15 && -15 + 15 = 0 \text{ por ser opuestos} \\ 6(x-4)^3 &= 48 && 33 + 15 = 48. \end{aligned}$$

En lo anterior usamos la propiedad uniforme en el primer paso, luego usamos la propiedad asociativa de la suma, la propiedad de existencia del opuesto y, finalmente, que el cero es neutro para la suma. Todas esas operaciones y propiedades se resumen al decir informalmente que "pasamos" el 15 sumando, y en la práctica los pasos intermedios se omiten o reducen.

De la misma forma, con el fin de despejar x ahora "pasamos" el número 6 para el otro lado. En este caso, como está multiplicando "pasa" para el otro lado

dividiendo, ya que para eliminarlo lo que hacemos es dividir ambos lados de la igualdad por 6:

$$\frac{\cancel{6}(x-4)^3}{\cancel{6}} = \frac{48}{6} \qquad \text{dividir ambos miembros por } 6$$

$$(x-4)^3 = 8 \qquad \frac{6}{6} = 1, \text{ por eso se “cancelan”.}$$

Ahora, aplicamos raíz cúbica a ambos lados (es la forma de “pasar” el número 3 que está como exponente hacia el otro miembro), y resolvemos para obtener

$$x - 4 = 2.$$

En lo anterior hemos usado la fórmula (2.3.3) (página 51) ya que, al ser 3 un número impar, el cubo y la raíz cúbica se “cancelan” directamente. Finalmente, sumamos 4 a ambos lados (informalmente, “pasamos el 4 sumando”) y se obtiene $x = 6$. Por fortuna, podemos verificar si este valor es correcto, poniendo 6 en cada lugar donde decía x en la ecuación original:

$$6(6-4)^3 - 15 = 33.$$

Es fácil ver que el lado izquierdo da como resultado 33, así que la respuesta $x = 6$ es correcta.

👉 **Es muy importante dar la respuesta al problema**, es decir, indicar el conjunto S cuyos elementos son las soluciones para la ecuación. En este caso, tenemos $S = \{6\}$.

⚠ Se debe notar que no hay una única manera de resolver una ecuación, pero sí es importante tener en cuenta la jerarquía entre las operaciones: para despejar la incógnita siempre se comienza “pasando” al otro lado lo que está “más lejos” de ella, en el sentido de la resolución de operaciones combinadas. Por ejemplo, una vez obtenido

$$6(x-4)^3 = 48$$

hubiera sido incorrecto si en el paso siguiente escribimos

$$6(x-4) = \sqrt[3]{48}. \quad ✗$$

El error se detecta rápidamente si, ante la duda, en lugar de “pasar” la potencia aplicamos raíz cúbica a ambos lados:

$$6(x-4)^3 = 48 \iff \sqrt[3]{6(x-4)^3} = \sqrt[3]{48} \iff \sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[\cancel{3}]{(x-4)^{\cancel{3}}} = \sqrt[3]{48},$$

es decir,

$$\sqrt[3]{6}\cdot(x-4) = \sqrt[3]{48}. \quad ✔$$

Esto muestra un camino diferente de proceder, “pasando” correctamente la raíz cúbica antes que el 6, el cual también es válido.

Veremos ahora algunos ejemplos de resolución de ecuaciones, ilustrando diferentes técnicas según el caso, así como ciertos errores frecuentes con el fin de evitarlos luego. Es importante la lectura de los mismos, ya que contienen las herramientas fundamentales para la resolución de ecuaciones.

Ejemplo 87. Resolver la ecuación $6(x+2) - 21 = 3(x+1)$.

Solución:

$$
\begin{aligned}
6(x+2) - 21 &= 3(x+1) && \\
6x + 12 - 21 &= 3x + 3 && \text{propiedad distributiva del producto} \\
6x - 9 &= 3x + 3 && \text{se resolvió } 12 - 21 \\
6x - 3x &= 9 + 3 && \text{se sumó } 9 - 3x \text{ en ambos miembros} \\
3x &= 12 && \text{se resolvió} \\
x &= 4 && \text{se dividieron ambos miembros por 3.}
\end{aligned}
$$

☞ El paso "se sumó $9 - 3x$ en ambos miembros" es lo que suele expresarse informalmente como "llevamos a un lado todo lo que tiene x, y al otro lo que no tiene x".

Luego de realizar la verificación (este es un paso que debe hacerse siempre, aunque lo omitiremos algunas veces aquí), podemos concluir que el conjunto solución de la ecuación es $S = \{4\}$. «

Ejemplo 88. Un error frecuente. ☞

Cuando no se comprende el proceso utilizado para despejar la incógnita en una ecuación, pueden cometerse errores como el siguiente:

$$6x = 30 \iff x = \frac{30}{-6} = -5. \quad ✗$$

Es decir, el número 6 que está multiplicando a la incógnita se lo "pasa" dividiendo, y como es positivo se lo "pasa" además como negativo. Incluso a veces, por ser positivo, suele verse lo siguiente:

$$6x = 30 \iff x = 30 - 6 = 24. \quad ✗$$

Todos estos errores pueden evitarse pensando cuál es la propiedad que hace que el número 6 se "elimine" del lado izquierdo: dividir ambos miembros por 6 como sigue

$$6x = 30 \iff \frac{\cancel{6}x}{\cancel{6}} = \frac{30}{6} \iff x = 5. \quad ✓$$ «

Ejemplo 89. Resolver la ecuación $5^2 + 3\sqrt{2x-6} = 2^3 5 - 9$.

Solución:

$$
\begin{aligned}
5^2 + 3\sqrt{2x-6} &= 2^3 5 - 9 && \\
25 + 3\sqrt{2x-6} &= 31 && \text{se resolvió } 5^2 \text{ y también } 2^3 5 - 9 \\
3\sqrt{2x-6} &= 31 - 25 && \text{se restó 25 en ambos miembros} \\
3\sqrt{2x-6} &= 6 && \text{se resolvió } 31 - 25 \\
\sqrt{2x-6} &= \tfrac{6}{3} && \text{se dividieron ambos miembros por 3} \\
\sqrt{2x-6} &= 2 && \text{se resolvió } \tfrac{6}{3} \\
2x - 6 &= 2^2 && \text{se elevaron ambos miembros al cuadrado} \\
2x &= 4 + 6 && \text{se sumó 6 en ambos miembros} \\
2x &= 10 && \text{se resolvió el miembro derecho} \\
x &= \tfrac{10}{2} && \text{se dividieron ambos miembros por 2} \\
x &= 5 && \text{se resolvió } \tfrac{10}{2}.
\end{aligned}
$$

Luego de realizar la verificación, podemos concluir que el conjunto solución de la ecuación es $S = \{5\}$. «

En lo anterior, uno de los pasos consistió en "elevar al cuadrado" ambos miembros de la ecuación. Como se muestra en el ejemplo siguiente, esto a veces puede introducir una solución ficticia, por lo que la verificación se convierte, en este caso, en un paso fundamental para la resolución de la ecuación.

Ejemplo 90. **Cuidado al elevar al cuadrado.**

Supongamos que tenemos la ecuación $\sqrt{x-3} = -2$, y para resolverla elevamos ambos miembros al cuadrado para eliminar el radical. Entonces obtenemos

$$x - 3 = (-2)^2 = 4,$$

lo cual implica $x = 7$. Verifiquemos si $x = 7$ es solución de la ecuación:

$$\sqrt{7-3} = \sqrt{4} = 2 \neq -2. \quad \text{✗}$$

¿Por qué elevar al cuadrado generó una solución incorrecta? Si observamos la ecuación original, del lado izquierdo tenemos una cantidad positiva (o cero), mientras que del derecho, una negativa. Esto permite concluir que ningún valor de x hará cierta esta igualdad, es decir, $S = \varnothing$. Al elevar al cuadrado ambos miembros los convertimos en positivos, y generamos así soluciones para la nueva ecuación, que no necesariamente resuelven la original. A continuación ampliaremos esto, y veremos cómo proceder en estos casos para determinar la solución de la ecuación dada. «

❓ En el ejemplo anterior, ¿cuál es la operación que generó una solución ficticia? Cuando, para eliminar el radical, elevamos un número a una potencia *par* podemos introducir una **solución ficticia**. El motivo es el siguiente:

$$a = b \Rightarrow a^2 = b^2.$$

Sin embargo,

$$a^2 = b^2 \not\Rightarrow a = b \qquad \text{pues lo correcto es} \qquad a^2 = b^2 \Rightarrow |a| = |b|,$$

ya que $\sqrt{x^2} = |x|$, según la fórmula (2.3.3) en la página 51 aplicada para $n = 2$.

☞ El razonamiento matemático para cuando trabajamos con implicaciones en lugar de equivalencias es el siguiente: si x es solución de la ecuación original, entonces debe satisfacer la obtenida al elevar la misma al cuadrado. Eso no significa que lo recíproco sea cierto: no todo valor que satisfaga la ecuación resultante de elevar al cuadrado la original, será solución de ella. **La importancia de los valores obtenidos al resolver la nueva ecuación es que, si la original tiene soluciones, estas se encontrarán entre dichos valores.** Luego, para hallar las soluciones de la ecuación dada, simplemente debemos verificar cuáles de estos valores la satisfacen. Si ninguno lo hace, la ecuación no tiene solución. Este es el procedimiento que debe efectuarse siempre que se trabaje con ecuaciones que involucren radicales. En el Ejemplo 102 volveremos a ilustrar esto.

Ejemplo 91. **Ecuaciones con valor absoluto.** Resolver $2|x - 4| - 1 = 5$.

Solución:

$$2|x - 4| - 1 = 5 \iff 2|x - 4| = 6 \iff |x - 4| = 3.$$

Si $|y| = 3$, por definición se tiene que $y = 3$ o $y = -3$. En símbolos,

$$|y| = 3 \iff y = 3 \quad \text{o} \quad y = -3.$$

En este caso, lo que cumple el rol de y es todo lo que está dentro del valor absoluto, es decir, $x - 4$. Luego

$$|x - 4| = 3 \iff x - 4 = 3 \quad \text{o} \quad x - 4 = -3.$$

Estas dos igualdades arrojan $x = 3 + 4 = 7$, o bien $x = -3 + 4 = 1$. Puesto que el conjunto solución S consiste en todas las soluciones posibles, tenemos que $S = \{7, 1\}$, como puede verificarse reemplazando x por estos valores en la ecuación original. «

Como vimos en el Ejemplo 90, al elevar ambos miembros de una ecuación al cuadrado (o cualquier otra potencia par), se pueden introducir soluciones ficticias. La clave está en que $\sqrt{x^2} = |x|$ (y no simplemente x, como suele verse cuando se "simplifican" el índice con el exponente). Recordar esto es fundamental para no "perder" soluciones al aplicar raíces con índice par en ambos miembros de una igualdad, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 92. **Cuidado al cancelar índices y exponentes pares.**

Considerar la ecuación $\frac{1}{2}(x+5)^2 = 8$. Veamos un error muy frecuente al resolver este tipo de ecuaciones, que lleva a "perder" soluciones:

$$\frac{1}{2}(x+5)^2 = 8 \iff (x+5)^2 = 16 \iff x+5 = 4 \iff x = -1. \quad ✗$$

Si bien $x = -1$ es una de las soluciones de la ecuación, al "pasar" la raíz en forma incorrecta perdimos otra de ellas. En este caso, la resolución correcta es

$$\frac{1}{2}(x+5)^2 = 8 \iff (x+5)^2 = 16 \iff \sqrt{(x+5)^2} = \sqrt{16} \iff |x+5| = 4. \quad ✓$$

Esta última igualdad de traduce en las posibilidades

$$x+5 = 4 \qquad \text{o} \qquad x+5 = -4,$$

lo cual induce las dos soluciones $x = -1$ y $x = -9$. Entonces $S = \{-1, -9\}$. «

El siguiente ejemplo muestra otra forma de perder soluciones, al "cancelar" expresiones que se anulan para algún valor de la incógnita.

Ejemplo 93. **Cuidado de no dividir por cero.**

La propiedad uniforme implica que si $a = b$ entonces $a : c = b : c$ para todo c *permitido* en la división, es decir, siempre que $c \neq 0$. Es por eso que hay que tener cuidado, cuando "pasamos dividiendo" una expresión, de asegurarnos de que esta sea distinta de cero, y considerar aparte el caso que sea cero, para no perder alguna de las soluciones de la ecuación. Para ilustrar esto, consideremos las siguientes ecuaciones:

$$3x - 6 = 8x - 16, \qquad x^3 - x^2 + 2x - 2 = 6x - 6.$$

Una forma de resolver la primera es sacando el número 3 como factor común del miembro izquierdo y el 8 del miembro derecho, para obtener

$$3(x-2) = 8(x-2).$$

Si en la expresión anterior "cancelamos" $(x-2)$, obtenemos $3 = 8$, lo cual no es cierto y podría hacernos pensar que la ecuación no tiene solución. Sin embargo, el error está en que cuando "cancelamos" en realidad estamos utilizando la propiedad uniforme para dividir ambos miembros por $(x-2)$. Al hacer esto, para no dividir por cero debemos pedir que $x \neq 2$. Entonces, **resta considerar el caso $x = 2$**: debemos preguntarnos si este valor es o no solución de la ecuación dada. Para ello reemplazamos por dicho valor en la ecuación original, y vemos que ambos miembros valen cero. Es decir, la igualdad se cumple, y por lo tanto $x = 2$ es solución de la ecuación. Luego, el conjunto solución es $S = \{2\}$.

Lo mismo ocurre con la segunda ecuación, en la que si sacamos factor común x^2 de los dos primeros términos de la izquierda, de los dos restantes sacamos 2 como factor común, y en el miembro derecho sacamos el número 6 como factor común, nos queda

$$x^2(x-1)+2(x-1)=6(x-1).$$

Si sacamos ahora factor común $(x-1)$ del lado izquierdo, la ecuación anterior resulta

$$(x-1)(x^2+2)=6(x-1).$$

Entonces consideramos dos posibilidades: $x=1$ y $x\neq 1$. En este último caso podemos dividir ambos miembros por $(x-1)$, ya que esta cantidad no es cero, y obtenemos

$$x^2+2=6.$$

Esto es equivalente a $x^2=4$, cuyas soluciones son $x=2$ y $x=-2$ (recordar que $\sqrt{x^2}=|x|$). Sin embargo, no debemos olvidarnos de considerar la posibilidad $x=1$, para determinar si este valor forma parte o no de las soluciones. Reemplazando x por dicho valor en la ecuación original se obtiene cero a ambos lados del signo igual, por lo que $x=1$ también es solución. Así, como puede verificarse, $S=\{2,-2,1\}$. «

Ejemplo 94. **La incógnita en el exponente.** Resolver la ecuación $5^{3x-2}=20$.

Solución: Para "bajar" el exponente aplicamos logaritmo a ambos miembros (en este caso en base 5) y luego usamos una de las propiedades del logaritmo (ver página 36) para "cancelar" las operaciones (pues $\log_a\left(a^x\right)=x\log_a a=x$):

$$5^{3x-2}=20 \iff \log_5\left(5^{3x-2}\right)=\log_5 20 \iff 3x-2=\log_5 20.$$

Puesto que $\log_5 20\approx 1.861$, podemos obtener un valor aproximado de la solución resolviendo la ecuación

$$3x-2=1.861,$$

cuya solución es $x=\frac{3.861}{3}=1.287$. Para verificar que el valor $x=1.287$ aproxima a la solución, reemplazamos en la ecuación para obtener

$$5^{3\cdot 1.287-2}=5^{1.861}\approx 20.$$

Trabajar con aproximaciones numéricas sirve para dar una idea del valor de la solución en problemas concretos. Pero, en este caso, dicha solución puede expresarse de manera exacta como

$$x^*=\frac{2+\log_5 20}{3},$$

de modo que el conjunto solución es $S=\{x^*\}$. «

Ejemplo 95. **La incógnita en el exponente: usando propiedades de la potencia.** Resolver la ecuación $2^x 16^{-x} = (0.5)^{x-8}$.

Solución: Notar que en este caso es posible expresar todas las potencias involucradas en la ecuación en una misma base. Así, la misma puede reescribirse como

$$2^x \left(2^4\right)^{-x} = \left(2^{-1}\right)^{x-8}.$$

Usando las propiedades de la potencia, podemos a su vez reescribirla como

$$2^{x-4x} = 2^{-x+8},$$

es decir,

$$2^{-3x} = 2^{-x+8}.$$

Aplicamos ahora logaritmo a ambos miembros (en este caso en base 2) y luego usamos una de las propiedades del logaritmo para "cancelar" las operaciones:

$$\log_2\left(2^{-3x}\right) = \log_2\left(2^{-x+8}\right) \iff -3x = -x + 8.$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos $x = -4$. Realicemos la verificación:

$$x = -4: \quad 2^{-4}16^4 = 2^{-4}2^{16} = 2^{12} = 2^{4+8} = (0.5)^{-4-8}. \quad ✔$$

Por lo tanto, podemos concluir que el conjunto solución es $S = \{-4\}$. «

Al resolver una ecuación suponemos que x es un valor que satisface la igualdad y, a partir de ello, operamos. Pero suponer que satisface la igualdad implica suponer que las operaciones involucradas en la misma están bien definidas para dicho valor. Esto aquí significa que no genera denominadores nulos, radicandos negativos cuando haya índices pares o logaritmos de un número negativo o cero. En otras palabras, suponemos que x es un valor "permitido" para la ecuación dada. Al momento de resolver una ecuación, es fundamental identificar los valores permitidos, para descartar como solución aquellos que no lo sean. El siguiente ejemplo ilustra el caso de los valores que deben descartarse debido a que generan un denominador nulo.

Ejemplo 96. **Valores no permitidos: generan denominadores nulos.**

Resolver la ecuación $\frac{3x}{x-3} = 1 + \frac{9}{x-3}$.

Solución: Puesto que la expresión $x - 3$ aparece en los denominadores, esto automáticamente descarta a $x = 3$ como solución de la ecuación, pues al reemplazar x por el valor 3, estaríamos dividiendo por cero. Teniendo esto presente, es decir, si $x \neq 3$, resolvamos ahora la ecuación:

$$\frac{3x}{x-3} = 1 + \frac{9}{x-3} \iff 3x = \left(1 + \frac{9}{x-3}\right)(x-3).$$

Aplicando la propiedad distributiva en el miembro derecho se obtiene

$$3x = x - 3 + 9,$$

lo que equivale a $2x = 6$, y por lo tanto $x = 3$. Puesto que este valor era no permitido, se concluye que la ecuación no tiene solución. A diferencia del Ejemplo 93 en el que dividimos por cero, en este caso la estrategia de multiplicar a ambos miembros por $x - 3$ es correcta, solamente que la solución obtenida estaba descartada de antemano. «

☞ El ejemplo anterior muestra cómo se procede cuando se trabaja con ecuaciones que involucran fracciones algebraicas, o cualquier expresión en la cual la incógnita aparece en un denominador: se deben descartar todos los valores de la misma que anulen a alguno de los denominadores dados. En ecuaciones con logaritmos, los valores permitidos para la incógnita son aquellos que no generan, en la ecuación dada, ningún logaritmo de un número negativo o cero. Ilustramos esto en los ejemplos a continuación.

Ejemplo 97. **Ecuaciones con logaritmos.** Resolver la ecuación

$$\log_5(3x) - \log_5(2x + 1) = 0.$$

Solución: Los valores permitidos son aquellos x tales que

$$3x > 0 \quad \text{y} \quad 2x + 1 > 0. \qquad (\dagger)$$

Esto significa que los valores de x que no satisfagan alguna de estas dos desigualdades no podrán ser solución de la ecuación, ya que generarían una operación no definida.

Para resolver este tipo de ecuaciones se utilizan las propiedades de los logaritmos:

$$\log_5(3x) - \log_5(2x + 1) = \log_5\left(\frac{3x}{2x + 1}\right),$$

por lo que la ecuación dada se reescribe como

$$\log_5\left(\frac{3x}{2x + 1}\right) = 0.$$

Notar que aquí el denominador $2x + 1$ es distinto de cero, pues requerimos que esta cantidad sea positiva al determinar los valores permitidos para x. Supongamos que existe un valor de x dentro de los permitidos (es decir, que verifica las dos desigualdades en (†)) que satisface la ecuación. Ahora trataremos de hallarlo. De la definición de logaritmo, la última igualdad vale si y solo si

$$5^0 = \frac{3x}{2x + 1}.$$

De esta manera, hemos eliminado el logaritmo para obtener la ecuación equivalente

$$1 = \frac{3x}{2x+1},$$

la que, a su vez, equivale a $3x = 2x + 1$, cuya solución es $x = 1$. Notar que este valor satisface las dos desigualdades establecidas al comienzo:

$$3 \cdot 1 > 0 \quad \text{y} \quad 2 \cdot 1 + 1 > 0,$$

por lo tanto es un valor permitido para la solución. Resta entonces realizar la verificación, para comprobar que es solución de la ecuación:

$$x = 1: \quad \log_5(3 \cdot 1) - \log_5(2 \cdot 1 + 1) = \log_5 3 - \log_5 3 = 0. \qquad \checkmark$$

Luego, el conjunto solución es $S = \{1\}$. «

Ejemplo 98. **Valores no permitidos: generan logaritmos de cantidades no positivas.**

Resolver la ecuación $\log_3(x-4) + \log_3(x+4) = 2$.

Solución: Los valores permitidos son aquellos x tales que

$$x - 4 > 0 \quad \text{y} \quad x + 4 > 0.$$

Para resolver la ecuación, sea x un valor que satisface la ecuación. Para hallarlo, aplicando la propiedad de la suma de logaritmos de igual base, tenemos que

$$\log_3(x-4) + \log_3(x+4) = \log_3\left((x-4)\cdot(x+4)\right),$$

por lo que la ecuación dada puede reescribirse como

$$\log_3\left((x-4)\cdot(x+4)\right) = 2.$$

De la definición de logaritmo, esto vale si y solo si

$$(x-4)\cdot(x+4) = 3^2,$$

lo cual es equivalente a

$$x^2 - 16 = 9.$$

Esta última igualdad equivale a $x^2 = 25$, y sabemos que los valores posibles de x que satisfacen esto son $x = 5$ y $x = -5$. Sin embargo, solamente el primero de ellos satisface las dos desigualdades requeridas para los valores permitidos, por lo $x = -5$ se descarta. Reemplacemos entonces en la ecuación para verificar que $x = 5$ es solución:

$$x = 5: \quad \log_3(5-4) + \log_3(5+4) = \log_3 1 + \log_3 9 = 0 + 2 = 2. \qquad \checkmark$$

Luego, el conjunto solución es $S = \{5\}$. «

Para el caso de ecuaciones que involucran radicales con índice par, los valores permitidos para la incógnita son aquellos que no generan radicandos negativos. Se ilustra el modo de resolver ecuaciones de este tipo en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 99. Valores no permitidos: generan radicales con índice par y radicando negativo.

Resolver la ecuación $\sqrt{x-3} = \sqrt{2x-4}$.

Solución: Los valores permitidos son aquellos x tales que

$$x - 3 \geq 0 \quad \text{y} \quad 2x - 4 \geq 0.$$

Para resolver la ecuación, comenzamos elevando ambos miembros al cuadrado para eliminar los radicales, obteniendo la ecuación

$$x - 3 = 2x - 4.$$

Hallemos su solución:

$$x - 3 = 2x - 4 \iff -3 + 4 = 2x - x,$$

es decir, $x = 1$. Sin embargo, este valor no es permitido ya que no satisface ninguna de las desigualdades requeridas al comienzo (como antes, no satisfacer al menos una de ellas es suficiente para descartarlo). Por lo tanto, no existe ningún número real que sea solución de la ecuación dada, y $S = \varnothing$. «

Con el fin de reforzar todo lo visto hasta aquí, resumimos a continuación los casos en los que se debe tener cuidado:

- **Formas de generar soluciones ficticias:** al elevar al cuadrado (u otra potencia par). Los valores que no resulten solución se detectarán al realizar la verificación. Ver Ejemplo 90.
- **Formas de "perder" soluciones:**
  - al simplificar incorrectamente exponentes e índices pares. Ver Ejemplo 92;
  - al dividir por una expresión y no considerar el caso en que la misma se anule. Ver Ejemplo 93.
- **Valores a descartar:**
  - los que generen denominadores iguales a cero. Ver Ejemplo 96;
  - los que generen logaritmos de cantidades no positivas. Ver Ejemplos 97 y 98;
  - los que generen radicandos negativos. Ver Ejemplo 99.

Algunas ecuaciones pueden ser llevadas a una forma particular: un producto de factores en un miembro, y cero en el otro. Para resolver este tipo de ecuaciones se utiliza una propiedad conocida como **propiedad del producto cero**, la cual establece que:

> Un producto de factores es cero si y solo si uno o más de los factores son iguales a cero.

El siguiente ejemplo muestra una aplicación de la propiedad del producto cero.

Ejemplo 100. **Un producto igual a cero.** Resolver la ecuación

$$(x-2)(x^3-1)=0.$$

Solución: Por la propiedad del producto cero, sabemos que la ecuación se satisface si y solo si uno o ambos factores son cero. Es decir

$$x-2=0 \qquad \text{o} \qquad x^3-1=0.$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene

$$x=2 \qquad \text{o} \qquad x=\sqrt[3]{1}=1.$$

Luego, tenemos que $S=\{2,\,1\}$. Se puede ver en la ecuación original que cualquiera de estos dos valores anulan el miembro izquierdo. «

Ejemplo 101. Resolver la ecuación $x^4-x^3+x^2-3x=6$.

Solución: La ecuación dada es equivalente a $x^4-x^3+x^2-3x-6=0$. Factorizando el polinomio que aparece a la izquierda, la ecuación se transforma en

$$(x-2)(x+1)(x^2+3)=0.$$

Por la propiedad del producto cero, sabemos que la ecuación se satisface si y solo si alguno de los factores es cero. Es decir

$$x-2=0, \qquad x+1=0 \qquad \text{o} \qquad x^2+3=0.$$

La última opción no es posible ya que $x^2+3\geq 0+3=3>0$, por lo que solamente pueden valer las dos primeras. Resolviendo estas dos ecuaciones se obtiene

$$x=2 \qquad \text{o} \qquad x=-1.$$

Entonces $S=\{2,\,-1\}$. Se puede ver en la ecuación original que cualquiera de estos dos valores hacen que el miembro izquierdo valga 6. «

Ejemplo 102. **Descartando soluciones ficticias.**

Hallar los valores de x que satisfacen la igualdad $x + 4 = \sqrt{x + 10}$.

Solución: Los valores permitidos para x son aquellos tales que $x + 10 \geq 0$, pues si el índice es par entonces el radicando no puede ser negativo. Para resolver la ecuación, elevamos ambos miembros al cuadrado para eliminar el radical, y obtenemos:

$$(x + 4)^2 = x + 10.$$

Resolvamos esta ecuación:

$$\begin{aligned}(x + 4)^2 = x + 10 &\iff x^2 + 8x + 16 = x + 10\\ &\iff x^2 + 7x + 6 = 0.\end{aligned}$$

Aplicando la regla de Ruffini, el polinomio que aparece en el miembro izquierdo puede factorizarse como $(x + 1)(x + 6)$, por lo que la ecuación se transforma en

$$(x + 1)(x + 6) = 0.$$

Por la propiedad del producto cero, las soluciones son $x = -1$ y $x = -6$. Ambos valores son permitidos, pues ninguno genera radicando negativo en la ecuación original. Sin embargo, puesto que hemos elevado al cuadrado para resolver, pudimos haber introducido una solución ficticia. Para determinar esto, debemos verificar la validez de la ecuación original con cada valor obtenido. A continuación calculamos el valor de ambos miembros de la ecuación dada para cada uno de los valores obtenidos, para determinar si se cumple la igualdad o no:

	$x + 4$	$\sqrt{x + 10}$	
$x = -1$	$-1 + 4 = 3$	$\sqrt{-1 + 10} = 3,$	✔
$x = -6$	$-6 + 4 = -2$	$\sqrt{-6 + 10} = 2.$	✗

Por lo tanto, el conjunto solución es $S = \{-1\}$. «

Como consecuencia de la propiedad del producto cero se obtiene la del **cociente cero**:

> Un cociente es cero si y solo si el numerador es cero (y el denominador es distinto de cero).

Ejemplo 103. **Un cociente igual a cero.** Resolver la ecuación

$$\frac{x^2 + 3x - 18}{x^2 + 1} = 0.$$

Solución: Observemos primero que el denominador que aparece en la ecuación nunca es cero, ya que $x^2 + 1 \geq 0 + 1 = 1 > 0$. Por la propiedad del cociente cero, sabemos que la ecuación se satisface si y solo si el numerador es cero. Es decir, la ecuación se transforma en

$$x^2 + 3x - 18 = 0.$$

Para resolver esta ecuación* aplicamos la regla de Ruffini para factorizar el polinomio del miembro izquierdo como $x^2 + 3x - 18 = (x+6)(x-3)$. Por lo tanto, la ecuación que debemos resolver es

$$(x + 6)(x - 3) = 0.$$

Aplicando ahora la propiedad del producto cero sabemos que las posibilidades son

$$x + 6 = 0 \qquad \text{o} \qquad x - 3 = 0.$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene $x = -6$ o $x = 3$. Puesto que ninguno de estos valores anula al denominador ya que, como dijimos al principio, este nunca se anula, ambos están permitidos. Por lo tanto, el conjunto solución es $S = \{-6, 3\}$. «


Para resolver ecuaciones en GeoGebra se dispone del comando Resuelve, donde se coloca entre paréntesis la ecuación en la cual la incógnita siempre debe llamarse x. Otra opción es ingresar la ecuación tal como aparece en el campo de entradas, y aparecerá un botón que dice RESUELVE. La salida será una o más líneas verticales indicando el o los valores de la solución. Si la ecuación es polinómica se indicará también una lista con las soluciones.

Ejercicios 4.2

1. Resolver los problemas planteados en los Ejemplos 82 y 83, de la página 96.

2. Resolver los problemas planteados en los Ejercicios 1 a 5 de la Sección 4.1.

3–24. Resolver las ecuaciones. Recordar que se debe expresar la solución y realizar la verificación (analizar antes cuáles son los valores permitidos).

3. $2(x + 3) - 5(-2x + 1) = 2x - 19$

4. $\frac{x}{4} + 3 - 2x = -11$

5. $-2 = \sqrt[3]{y - 7}$

6. $\frac{3x-1}{2} + \frac{4-2x}{3} = x + 3$

*En la sección siguiente veremos una fórmula para resolver este tipo de ecuaciones.

7. $\frac{2}{x-3} + \frac{4}{5-x} = 0$

8. $-2 + |t-3| = 6$

9. $|1+5x| = -9$

10. $\big||5-2x| - 8\big| = 3$

11. $\left|\frac{x-3}{x+2}\right| = 2$

12. $\sqrt{x-2} = 1 + \sqrt{x-4}$

13. $3^{2x-1} = 81$

14. $5^x \cdot 25^x = 125$

15. $\sqrt[2-x]{25^{\frac{2x+1}{2}}} = \frac{1}{5}$

16. $2^{3x} = (0.5)^{3x+2}$

17. $\sqrt[3x]{\sqrt[3]{\sqrt[3x]{9}}} = 3^{2x}$

18. $\log(x+1) + \log 5 = \log(x-3)$

19. $\log_3\left((2x-5)^4\right) = 8$

20. $\log_9(x+1) + \log_9\left(9(x+1)\right) = 2$

21. $\log_x 81 - 2\log_x 3 = 2$

22. $\log_2 x + \log_2(x+6) = 4$

23. $\ln(x+8) = \ln x + \ln 8$

24. $\log\sqrt{8x+2} - \log\sqrt{x-4} = 1 - \log 2$

25. Factorizar para resolver las siguientes ecuaciones polinómicas:

(a) $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6 = 0$

(b) $2x^5 + 2x^4 - 16x^3 - 24x^2 = 0$

(c) $x^6 - 25x^4 + x^2 = 25$

(d) $2x^4 - 4x^3 + 2x^2 = x^3 + x - 2$

(e) $x^3 + 5x^2 + x = 3x^2 + 16x + 36$

26. Ingresar las ecuaciones polinómicas del ejercicio anterior en el campo de entradas de GeoGebra para comparar con los resultados obtenidos.

27. Cintia quiere ser cantante. Tiene un contrato discográfico que le paga una tarifa base de $4000 pesos mensuales y $120 por cada disco que vende. El mes pasado ganó un total de $8440. Escribir una ecuación que determine el número de discos que vendió Cintia el último mes, y resolverla.

28. Al multiplicar un cierto número por 81, este aumenta en 154000 unidades. ¿Cuál es dicho número?

29. La suma de tres números impares consecutivos es igual a 99. Hallar la suma de los dos números mayores.

30. Hay 3400 personas en un estadio. Se observa que por cada 10 visitantes había 24 locales. ¿Cuántos locales asistieron?

31. La suma de las edades de 4 amigos es 46. José y Franco tienen la misma edad. Francisco supera en 3 años a la mitad de la edad de cada uno de ellos, mientras que Luciano tiene 4 años más que Francisco. Determinar la edad de cada uno.

4.3. Ecuaciones de segundo grado

En esta sección veremos cómo resolver una **ecuación de segundo grado** (también llamada **cuadrática**), la cual es una de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

donde a, b y c son números reales, con $a \neq 0$, y x es la incógnita. Es decir, es un polinomio de grado 2 igualado a cero. Aquí a es llamado **coeficiente cuadrático**, b el **coeficiente lineal** y c es el **término independiente**.

Notar que pedimos el coeficiente cuadrático a distinto de cero para que efectivamente sea un polinomio de grado 2, ya que si $a = 0$ entonces la ecuación es $bx + c = 0$, la cual deja de ser cuadrática. Si $b \neq 0$, la solución de esta ecuación lineal es $x = -\frac{c}{b}$.

Sin embargo, los coeficientes b o c pueden ser cero. Si esto ocurre, es decir, si al menos uno de ellos es cero, entonces la ecuación cuadrática es sencilla de resolver, aplicando las herramientas dadas en la sección anterior. Analizaremos estos casos en los dos ejemplos siguientes.

Ejemplo 104. **Coeficiente lineal $b = 0$.** Supongamos que tenemos la ecuación

$$2x^2 - 8 = 0.$$

Esta ecuación se resuelve en forma directa con lo aprendido en la sección anterior, simplemente despejando x de la forma usual:

$$2x^2 - 8 = 0 \iff 2x^2 = 8 \iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2.$$

Luego, el conjunto solución de la ecuación es $S = \{2, -2\}$. Notar que el mismo conjunto es solución de

$$-2x^2 + 8 = 0.$$

Sin embargo, veamos qué ocurre si la ecuación fuese

$$2x^2 + 8 = 0.$$

En este caso, con los mismos pasos anteriores obtenemos

$$x^2 = -4,$$

cuya solución no existe en los reales pues ningún número real elevado al cuadrado da como resultado un número negativo. Lo mismo ocurre si tenemos la ecuación

$$-2x^2 - 8 = 0.$$ «

El ejemplo anterior se escribe en forma general como sigue.

La ecuación cuadrática $ax^2 + c = 0$ tiene solución real si y solo si $a \cdot c \leq 0$ (es decir, o bien a y c tienen signos distintos, o bien $c = 0$), y en tal caso el conjunto solución es $S = \left\{\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}\right\}$. Si $c = 0$, el conjunto solución se reduce a $S = \{0\}$.

Ejemplo 105. **Término independiente $c = 0$.** Supongamos que tenemos la ecuación

$$5x^2 - 3x = 0.$$

Entonces podemos factorizar el miembro izquierdo, extrayendo a x como factor común:

$$x(5x - 3) = 0.$$

Por la propiedad del producto cero, sabemos que esto ocurre si y solo si

$$x = 0 \qquad \text{o bien} \qquad 5x - 3 = 0.$$

Despejando x en la última igualdad obtenemos que el conjunto solución de la ecuación dada es $S = \left\{0, \frac{3}{5}\right\}$. «

En forma general, factorizando $ax^2 + bx = x(ax + b)$ tenemos que:

El conjunto solución de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx = 0$ es $S = \left\{0, \frac{-b}{a}\right\}$. Si $b = 0$, el conjunto solución se reduce a $S = \{0\}$.

Entonces solamente resta ver cómo resolver ecuaciones de segundo grado en las que el polinomio involucrado es completo, es decir, con todos los coeficientes distintos de cero:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

con a, b y c no nulos. Para resolverla, usaremos una técnica que se conoce como **completar cuadrados**, que consiste en sumar y restar una cantidad adecuada, de manera de hacer aparecer un trinomio cuadrado perfecto. Al sumar y restar una misma cantidad en uno de los miembros, no estamos alterando la ecuación, pues lo que agregamos en total es cero.

Recordemos que un **trinomio cuadrado perfecto** (abreviado **t.c.p.**) es un polinomio de tres términos que resulta de elevar al cuadrado un binomio (ver página 64). En particular, consideremos el que se obtiene de elevar al cuadrado el binomio $x + r$, para algún r real:

$$(x + r)^2 = x^2 + 2rx + r^2.$$

Queremos sumar (y luego restar) una cantidad adecuada, para que aparezca en la ecuación original algo que tenga la "forma" del trinomio anterior. Esta forma puede describirse como sigue: el término independiente (r^2) es el cuadrado de la mitad del coeficiente lineal ($2r$), mientras que el coeficiente cuadrático es 1. Antes de hacerlo en forma general, veamos un ejemplo para aclarar esta frase.

Ejemplo 106. **Completando cuadrados.** Consideremos la ecuación

$$x^2 - 6x + 5 = 0.$$

En este caso el coeficiente lineal es -6, su mitad es -3, y $(-3)^2 = 9$, que no coincide con el término independiente que es 5. El truco consiste en hacer aparecer dicho 9, pero, para no afectar el resultado de la ecuación, así como lo sumamos también lo restamos:

$$x^2 - 6x + 5 = \underbrace{x^2 - 6x + 9}_{\text{t.c.p.}} - 9 + 5 = (x - 3)^2 - 4.$$

Entonces la ecuación se transforma en

$$(x - 3)^2 - 4 = 0 \iff (x - 3)^2 = 4 \iff x - 3 = \pm 2,$$

lo que produce las opciones $x_1 = 2 + 3 = 5$ y $x_2 = -2 + 3 = 1$ (se utiliza la notación x_1 y x_2 para indicar dos valores diferentes para las soluciones). Es decir, el conjunto solución es $S = \{5, 1\}$. Puede verse fácilmente que estos dos valores satisfacen la ecuación original:

$5^2 - 6 \cdot 5 + 5 = 25 - 30 + 5 = 0$ ✔ y $1^2 - 6 \cdot 1 + 5 = 1 - 6 + 5 = 0.$ ✔ «

OPCIONAL

Notar que en el ejemplo anterior el signo del binomio viene dado por el signo del coeficiente lineal, es decir, el trinomio proviene de resolver $(x+r)^2$, siendo r la mitad del coeficiente lineal, que puede ser negativo o positivo.

Ejemplo 107. Resolver la ecuación cuadrática $2x^2 + 4x - 1 = 0$ utilizando el método de completar cuadrados.

Solución: A diferencia del ejemplo anterior, el coeficiente cuadrático no es 1. Entonces, el primer paso en este caso es extraer dicho coeficiente como factor común, para luego completar cuadrados en lo obtenido:

$$2x^2 + 4x - 1 = 2\left(x^2 + 2x - \tfrac{1}{2}\right) = 2\Big(\underbrace{x^2 + 2x + 1}_{\text{t.c.p.}} - 1 - \tfrac{1}{2}\Big)$$

$$= 2\left((x+1)^2 - \tfrac{3}{2}\right) = 2(x+1)^2 - 3.$$

Entonces la ecuación se transforma en

$$2(x+1)^2 - 3 = 0 \iff (x+1)^2 = \tfrac{3}{2} \iff x + 1 = \pm\sqrt{\tfrac{3}{2}},$$

lo que implica $x_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} - 1$ y $x_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}} - 1$. «

Cuando el coeficiente cuadrático no es igual a 1, este debe extraerse como factor común. En el ejemplo anterior lo tomamos como factor común de los tres términos, pero también podríamos haberlo tomado solamente de los dos que poseen x:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 4x - 1 &= 2\left(x^2 + 2x\right) - 1 \\ &= 2\left(x^2 + 2x + 1 - 1\right) - 1 \\ &= 2\left(x^2 + 2x + 1\right) - 2 - 1 \\ &= 2(x+1)^2 - 3. \end{aligned}$$

Hacerlo de esta manera evitó incluir fracciones innecesarias. La única precaución que debemos tener es que cuando llevamos el $-r^2$ fuera del paréntesis (en este caso es -1), no hay que olvidar que está multiplicado por el factor común (que en este caso es 2).

No toda ecuación cuadrática tiene siempre dos soluciones reales. Como puede verse en los siguientes ejemplos, puede ocurrir también que tenga una única solución, o incluso que no tenga ninguna.

OPCIONAL

Ejemplo 108. **Una ecuación cuadrática con solución única.** Completar cuadrados para resolver la ecuación $x^2 - 2x + 1 = 0$.

Solución: En este caso el coeficiente lineal es -2, su mitad es -1 y $(-1)^2 = 1$, lo cual coincide con el término independiente. Esto significa que el polinomio del miembro izquierdo ya es un trinomio cuadrado perfecto:

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2.$$

Entonces la ecuación se transforma en

$$(x-1)^2 = 0 \iff |x-1| = 0 \iff x - 1 = 0 \iff x = 1.$$

Puede verificarse que reemplazando x por 1 en el miembro izquierdo de la ecuación original se obtiene cero como resultado, por lo que $S = \{1\}$. «

Ejemplo 109. **Una ecuación cuadrática sin solución.** Resolver la ecuación cuadrática $x^2 - 2x + 3 = 0$ utilizando el método de completar cuadrados.

Solución: Aquí, al igual que en el ejemplo anterior, el coeficiente lineal es -2, y el cuadrado de su mitad es 1, lo cual no coincide con su término independiente 3. Entonces, al sumar y restar 1 se obtiene

$$x^2 - 2x + 3 = (x^2 - 2x + 1) - 1 + 3 = (x-1)^2 + 2.$$

Entonces la ecuación se transforma en

$$(x-1)^2 + 2 = 0 \iff (x-1)^2 = -2.$$

La última ecuación no tiene solución, ya que ningún número real elevado al cuadrado puede dar como resultado un número negativo. Por lo tanto, la ecuación no tiene solución real y $S = \varnothing$. «

Siguiendo las mismas ideas de los ejemplos anteriores, consideremos ahora el caso general

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

con a no nulo. Completemos cuadrados:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{c}{a}\right) = a\Big(\underbrace{x^2 + \tfrac{b}{a}x + \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2}_{\text{t.c.p.}} - \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2 + \tfrac{c}{a}\Big)$$

$$= a\left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 + c - \tfrac{b^2}{4a} = a(x-h)^2 + k,$$

con $h = -\frac{b}{2a}$ y $k = c - \frac{b^2}{4a}$ (esta forma de expresar un polinomio cuadrático se retomará en el Capítulo 5). Luego, la ecuación original se transforma en

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

OPCIONAL

Aplicando raíz cuadrada a ambos miembros (recordar la propiedad (2.3.3)) y resolviendo, obtenemos

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2|a|} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

La fórmula anterior se llama **resolvente** y se aplica para hallar, si existen, las soluciones reales de una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Si el radicando que aparece en la fórmula es negativo, entonces la ecuación no tendrá soluciones reales. Si es cero, tendrá una única solución (llamada **solución doble**), y si es positivo entonces la ecuación tendrá dos soluciones reales distintas x_1 y x_2 dadas por

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

El radicando se llama **discriminante** de la ecuación cuadrática y se denota como

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Como mencionamos, será suficiente con calcular el valor del discriminante para saber la cantidad de soluciones de una ecuación cuadrática:

- $\Delta > 0$: dos soluciones reales distintas;
- $\Delta = 0$: una solución (llamada doble);
- $\Delta < 0$: sin soluciones reales.

Lo anterior justifica el "criterio de parada" para la factorización de polinomios cuadráticos, enunciado en la página 83.

Ejemplo 110. **Aplicando la resolvente.** Hallar las soluciones de la ecuación

$$2x^2 + 4x - 6 = 0.$$

Solución: Debemos resolver una ecuación cuadrática en la que $a = 2$, $b = 4$ y $c = -6$. Aplicando la resolvente con estos valores tenemos

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{4} = \frac{-4 \pm 8}{4},$$

de lo que se obtiene $x_1 = \frac{-4+8}{4} = 1$ y $x_2 = \frac{-4-8}{4} = -3$. Luego, $S = \{1, -3\}$. «

Ejemplo 111. Resolver la ecuación $\log_7(2x) - \log_7(x^2 - 8) = 0$.

Solución: Los valores permitidos para x son aquellos tales que

$$2x > 0 \quad \text{y} \quad x^2 - 8 > 0,$$

ya que el logaritmo de cero o de números negativos no está definido.

Para resolver la ecuación, comenzamos aplicando la propiedad de la resta de dos logaritmos con igual base para transformar la ecuación en

$$\log_7\left(\frac{2x}{x^2-8}\right) = 0.$$

Por definición de logaritmo, esto es equivalente a

$$7^0 = \frac{2x}{x^2-8},$$

con lo que eliminamos el logaritmo, y ahora debemos resolver esta última ecuación:

$$1 = \frac{2x}{x^2-8} \iff x^2 - 8 = 2x \iff x^2 - 2x - 8 = 0.$$

Resolvemos ahora esta ecuación cuadrática usando la resolvente:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 6}{2},$$

lo que lleva a $x_1 = 4$ y $x_2 = -2$. Sin embargo, $x = -2$ no formará parte del conjunto solución, ya que no satisface las desigualdades que definen a los valores permitidos (en este caso no satisface ninguna de las dos, pero no satisfacer alguna de ellas es suficiente para descartar dicho valor). Para verificar que $x = 4$ es solución de la ecuación original, reemplazamos para obtener:

$$x = 4: \quad \log_7(2 \cdot 4) - \log_7(4^2 - 8) = \log_7(8) - \log_7(8) = 0. \quad ✔$$

Luego, la única solución es $x = 4$, es decir, $S = \{4\}$. «

El siguiente ejemplo muestra que a veces algunas soluciones de la ecuación deben ser descartadas como soluciones de un problema concreto. Esto se debe a que, si bien la ecuación modela el problema, por el contexto del mismo algunos valores no son permitidos.

Ejemplo 112. **Soluciones descartadas debido al contexto.**

Hallar la longitud de la base de un triángulo que tiene un área de $24\ \text{cm}^2$, y cuya altura mide 2 cm más que la base correspondiente.

Solución: Llamemos x a la longitud de la base (en centímetros). Entonces la altura mide $x + 2$ cm. Sabemos que

$$24 = \text{Área} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{x(x+2)}{2}.$$

Es decir $48 = x(x+2)$, o equivalentemente,

$$0 = x^2 + 2x - 48.$$

Aplicando la resolvente se obtienen dos soluciones para esta ecuación: $x_1 = 6$ y $x_2 = -8$. Sin embargo, como x representa una longitud, la solución negativa queda descartada. Entonces la única solución posible para el problema es que la longitud de la base sea 6 cm. «

Ejemplo 113. **Usando el discriminante.** Utilizar el discriminante para determinar la cantidad de soluciones de las siguientes ecuaciones cuadráticas:

(**a**) $4x^2 + 2x + 3 = 0$, (**b**) $-x^2 - x + 12 = 0$, (**c**) $x^2 - 6x + 9 = 0$.

Solución: Calculemos el discriminante de cada ecuación:

(a) $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = -44$,

(b) $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 12 = 49$,

(c) $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$.

De esto podemos concluir que la ecuación (**a**) no tiene soluciones reales, la (**b**) tiene dos soluciones reales distintas, mientras que la (**c**) tiene solución única. «

 Si bien la resolvente es una fórmula muy útil para hallar soluciones de una ecuación cuadrática, manejar el procedimiento de completar cuadrados resultará fundamental para conocer la apariencia de las funciones cuadráticas, que serán estudiadas en el capítulo siguiente.

 Recordemos que el teorema del resto afirma que si r es un número real y p es un polinomio de grado al menos 1, entonces el resto de dividir p por $(x - r)$ es $p(r)$, es decir, el resto es el valor que se obtiene al hallar el valor numérico de p en r. Como consecuencia directa de esto, el teorema del factor afirma que el binomio $(x - r)$ es factor del polinomio p si y solo si $p(r) = 0$. Sea $p(x) = ax^2 + bx + c$ un polinomio de grado 2, y sean x_1 y x_2 dos soluciones reales (distintas o iguales) de la ecuación $p(x) = 0$ obtenidas mediante la resolvente. Es decir que

$$p(x_1) = 0 \qquad \text{y} \qquad p(x_2) = 0,$$

o equivalentemente, x_1 y x_2 son raíces de p (esto significa que estamos en el caso $\Delta \geq 0$). Luego, tanto $(x - x_1)$ como $(x - x_2)$ son factores de p. Más precisamente, se tiene que p se factoriza como:

$$p(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Ejemplo 114. **Factorizando un polinomio cuadrático.** Utilizar la resolvente para factorizar los polinomios

$$p(x) = x^2 + x - 6 \qquad \text{y} \qquad q(x) = 2x^2 - 20 - 6x.$$

Una vez obtenida la factorización, verificar que es correcta resolviendo el producto para recuperar los polinomios dados.

Solución: Comencemos aplicando la resolvente para hallar las soluciones de $p(x) = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 5}{2},$$

de lo que se infiere $x_1 = 2$ y $x_2 = -3$. Entonces, podemos factorizar p como

$$p(x) = (x - 2)(x + 3).$$

Para verificar, hacemos la distributiva y operamos:

$$(x - 2)(x + 3) = x^2 + 3x - 2x - 6 = x^2 + x - 6 = p(x). \quad ✔$$

Con respecto a q, tenemos

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-20)}}{2 \cdot 2} = \frac{6 \pm 14}{4},$$

lo que implica $x_1 = 5$ y $x_2 = -2$. Por lo tanto q se factoriza como

$$q(x) = 2(x - 5)(x + 2).$$

Realicemos la verificación:

$$2(x-5)(x+2) = 2(x^2+2x-5x-10) = 2(x^2-3x-10) = 2x^2-6x-20 = q(x), \quad ✔$$

por lo que la factorización obtenida es correcta. «

⚠ Un error frecuente es olvidar el número a en la factorización anterior, y escribir

$$q(x) = (x - 5)(x + 2). \quad ✗$$

Ejercicios 4.3

1. Resolver las siguientes ecuaciones:

(a) $x^2 + 2 = 38$

(b) $x^2 + 4 = 0$

(c) $2x^2 - 4x = 0$

(d) $\frac{x^2-x}{x^2+1} = 0$

(e) $\frac{x^2-x}{x-1} = 0$

2. Hallar el valor de c tal que $x^2 - 8x + c$ es un trinomio cuadrado perfecto.

3. Completar cuadrados para llevar cada polinomio a la forma $a(x-h)^2 + k$. Verificar.

(a) $x^2 + 5 - 2x$

(b) $x^2 + 4x + 1$

(c) $-2x^2 - x + 1$

4. Completar cuadrados para resolver las siguientes ecuaciones:

(a) $x^2 + x - 6 = 0$

(b) $2x^2 + 8x + 8 = 0$

(c) $x^2 - 2x + 2 = 0$

(d) $x^2 - 4 - 3x = 0$

5. Hallar, si es posible, las soluciones de las siguientes ecuaciones aplicando la resolvente:

(a) $2x^2 + 50 + 20x = 0$

(b) $x^2 + 3x - 4 = 0$

(c) $x^2 + 6x + 13 = 0$

6. Resolver las siguientes ecuaciones:

(a) $x(3x-2) = x^2 - 5x$

(b) $4 - 3x - x^2 = (3x-2)^2 - 1$

(c) $\frac{x^2+2x-3}{3x+2} = 0$

(d) $\frac{x^2+2x-3}{x-1} = 0$

(e) $\sqrt{2x-1} = x - 2$. *Advertencia:* recordar que al elevar al cuadrado se pueden introducir soluciones ficticias.

(f) $3\sqrt{2x-1} = 3x$

(g) $\sqrt{x^2+6x} = x + \sqrt{2x}$. *Sugerencia:* elevar al cuadrado dos veces para eliminar por completo las raíces y luego factorizar para aplicar la propiedad del producto cero.

(h) $3\log_2(x) - \log_2(x+1) = \log_2\left(\frac{x}{2}\right)$

7. Usar el discriminante para determinar cantidad de soluciones de las siguientes ecuaciones:

(a) $2x^2 - 2x - 24 = 0$

(b) $-x^2 - 5 + 2x = 0$

(c) $-x^2 - 4x - 4 = 0$

8. Determinar el valor de a de modo que la ecuación $ax^2 - 24x + 9 = 0$ tenga una raíz doble.

9. Utilizar la resolvente para factorizar los polinomios dados a continuación:

(a) $p(x) = x^2 + 6x + 8$

(b) $q(x) = 3x^2 + 3x - 6$

(c) $r(x) = x^2 + 2x - 63$

10. La altura de un triángulo es 2 cm menor que la longitud de la base, y su área es de 684 cm^2. ¿Cuáles son las medidas de la base y de la altura de dicho triángulo?

11. Encontrar un número natural tal que dos veces su cuadrado exceda al propio número en 120.

12. La suma de los cuadrados de dos números naturales consecutivos es 113. Encontrar dichos números.

13. La suma de los cuadrados de dos números naturales *pares* consecutivos es 100. Encontrar dichos números.

14. Encontrar dos números naturales *impares* consecutivos tales que su producto sea igual a 195.

15. Un joven empleado, interrogado acerca de su edad respondió: "El doble del cuadrado de la edad que tendré dentro de cuatro años, menos el triple del cuadrado de la edad que tenía hace dos años, es el doble de la edad que tendré dentro de 54 años". Determinar la edad del joven empleado al momento de responder la pregunta.

4.4. Sistemas de ecuaciones lineales

Un **sistema de ecuaciones** es un conjunto de ecuaciones con las mismas incógnitas. Resolver un sistema significa hallar todas las **soluciones** del sistema, es decir, todos los valores posibles para las incógnitas que hacen verdadera cada una de las ecuaciones.

En particular, veremos métodos para resolver un sistema de **dos ecuaciones lineales con dos incógnitas**[*], el cual es uno de la forma

$$\begin{cases} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2, \end{cases}$$

donde a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 y c_2 son números reales, y las incógnitas son x e y. La llave se usa para enfatizar que se quiere que ambas ecuaciones se cumplan a la vez, es decir, una solución al sistema son valores para x e y que hacen válidas a ambas igualdades simultáneamente.

Ejemplo 115. **Comprobando si es solución de un sistema.** Podemos comprobar que $x = 3$ e $y = 1$ es una solución del sistema

$$\begin{cases} 2x - y &= 5 \\ 3x + 2y &= 11, \end{cases}$$

pues

$$2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5, \quad \checkmark$$

$$3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 9 + 2 = 11. \quad \checkmark \quad \ll$$

La solución en el ejemplo anterior también se puede escribir como par ordenado $(3, 1)$, como veremos en el Capítulo 5 cuando presentemos una interpretación gráfica de este tipo de sistemas y de sus soluciones. Allí encontraremos también una explicación para el siguiente hecho.

Dado un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, ocurre exactamente una de las siguientes opciones:

- **Tiene una solución única.**
- **Tiene infinitas soluciones.**
- **No tiene solución.**

[*]Una **ecuación de primer grado** o **ecuación lineal** es una igualdad que involucra una o más incógnitas con exponente igual a 1, y no contiene productos entre ellas, es decir, una ecuación que contiene solamente sumas y restas de múltiplos constantes de una variable a la primera potencia.

Estas tres opciones son las únicas posibilidades para las soluciones de un sistema de este tipo: una, ninguna o infinitas.

Los sistemas reciben un nombre de acuerdo a la cantidad de soluciones que posean: **compatible determinado** (solución única), **compatible indeterminado** (infinitas soluciones), o **incompatible** (sin soluciones).

La resolución analítica de este tipo de sistemas es bastante sencilla, pues consiste esencialmente en transformar el sistema en una ecuación lineal de una sola incógnita, resolverla y hallar con la solución obtenida el valor de la incógnita restante. Para ello, veremos dos métodos que describiremos a continuación.

Método de sustitución. Como su nombre lo indica, este método consiste en despejar una de las incógnitas de alguna de las dos ecuaciones, y sustituir lo obtenido en la restante.

Para ilustrar el procedimiento, resolvamos algunos sistemas mediante este método.

Ejemplo 116. **Resolviendo por sustitución: solución única.** Resolver mediante sustitución el siguiente sistema, y luego clasificarlo según la cantidad de soluciones:

$$\begin{cases} 2x + 4y &= -10 \\ x - 5y &= 2. \end{cases}$$

Solución: Observando el sistema, lo más simple es despejar x de la segunda ecuación para obtener

$$x = 2 + 5y. \quad (*)$$

Ahora sustituimos esta expresión donde aparece x en la primera ecuación y resolvemos:

$$2(2 + 5y) + 4y = -10 \iff 4 + 10y + 4y = -10 \iff 14y = -14 \iff y = -1.$$

Ya tenemos el valor para y, por lo que reemplazando en $(*)$ obtenemos

$$x = 2 + 5(-1) = -3.$$

Para verificar, podemos reemplazar estos dos valores en ambas ecuaciones y ver que las igualdades se cumplen. Por lo tanto la solución al sistema es $x = -3$, $y = -1$, y el sistema es compatible determinado (tiene solución única). «

Ejemplo 117. **Resolviendo por sustitución: infinitas soluciones.** Utilizar el método de sustitución para resolver y clasificar el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y &= 1 \\ -4x + 6y &= -2. \end{cases}$$

Solución: Si despejamos x en la primera ecuación nos queda

$$x = \frac{1+3y}{2}. \quad (\diamond)$$

Ahora sustituimos esta expresión donde aparece x en la segunda ecuación:

$$-4\left(\frac{1+3y}{2}\right) + 6y = -2.$$

Para resolver lo anterior, aplicamos la propiedad distributiva y obtenemos

$$-2 - 6y + 6y = -2,$$

lo que equivale a $-2 = -2$. Puesto que esta igualdad es siempre cierta, independientemente del valor de y, cualquier número real es solución de ella. Para un valor fijo de y se obtiene el correspondiente valor de x que hace verdaderas las dos ecuaciones mediante $(\diamond)$. Para aclarar esto, realicemos la verificación: sea y un número real cualquiera, y sea

$$x = \frac{1+3y}{2}.$$

Veamos que estos valores satisfacen ambas ecuaciones del sistema dado:

$$2x - 3y = 2\underbrace{\left(\frac{1+3y}{2}\right)}_{x} - 3y = 1 + 3y - 3y = 1, \quad \checkmark$$

$$-4x + 6y = -4\underbrace{\left(\frac{1+3y}{2}\right)}_{x} + 6y = -2 - 6y + 6y = -2. \quad \checkmark$$

Así, para cada número real y dado se obtiene un correspondiente valor de x, de manera que ambas igualdades se cumplen. Por ejemplo, cuando $y = 1$ el valor de x es $\frac{1+3\cdot 1}{2} = 2$, o cuando $y = 0$ entonces $x = \frac{1+3\cdot 0}{2} = \frac{1}{2}$. Luego la ecuación tiene infinitas soluciones, por lo que el sistema es compatible indeterminado. «

Ejemplo 118. **Resolviendo por sustitución: sin solución.** Resolver mediante sustitución el siguiente sistema, y luego clasificarlo:

$$\begin{cases} x + y &= 3 \\ 2x + 2y &= 2. \end{cases}$$

Solución: Si despejamos y en la primera ecuación nos queda

$$y = 3 - x.$$

Ahora sustituimos esta expresión donde aparece y en la segunda ecuación:

$$2x + 2(3 - x) = 2.$$

Para resolver lo anterior, aplicamos la propiedad distributiva y obtenemos

$$2x + 6 - 2x = 2,$$

lo que equivale a $6 = 2$. Puesto que esta igualdad es falsa independientemente del valor de x, la ecuación no tiene solución, y por lo tanto tampoco la tendrá el sistema. En este caso, es un sistema incompatible. «

Veamos ahora otra forma de resolver este tipo de sistemas.

Método de igualación. Este método consiste en despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones, y después igualar (como lo indica el nombre) las dos expresiones obtenidas. De esta forma se obtiene una ecuación con una sola incógnita, la cual podemos resolver para luego obtener el valor de la otra.

Resolvamos algunos sistemas mediante este método para ilustrarlo.

Ejemplo 119. **Resolviendo por igualación: solución única.** Utilizar el método de igualación para resolver y clasificar el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x - 4y &= -6 \\ -x + 5y &= 13. \end{cases}$$

Solución: Por el aspecto de ambas ecuaciones, parece conveniente despejar x de ambas para obtener

$$\begin{cases} x &= \frac{-6+4y}{3} \\ x &= 5y - 13. \end{cases}$$

Igualamos entonces las dos expresiones obtenidas para x, y luego resolvemos:

$$\begin{aligned} \frac{-6 + 4y}{3} = 5y - 13 &\iff -6 + 4y = 3(5y - 13) \\ &\iff -6 + 4y = 15y - 39 \\ &\iff 33 = 11y \\ &\iff y = 3. \end{aligned}$$

Teniendo el valor para y, podemos obtener el de x reemplazando en cualquiera de las dos expresiones para ella en función de y:

$$x = 5 \cdot 3 - 13 = 15 - 13 = 2.$$

Por lo tanto, luego de realizar la verificación, se concluye que la solución al sistema es $x = 2$ e $y = 3$, por lo que el mismo es compatible determinado. «

Ejemplo 120. **Resolviendo por igualación: infinitas soluciones.** Resolver por igualación y clasificar:

$$\begin{cases} 3x - 6y &= 12 \\ 4x - 8y &= 16. \end{cases}$$

Solución: Parece indistinto despejar cualquiera de las dos incógnitas, por lo que elegiremos despejar x en ambas para obtener, luego de simplificar, el sistema

$$\begin{cases} x &= 4 + 2y \\ x &= 4 + 2y. \end{cases}$$

Igualando las dos expresiones obtenidas para x nos queda

$$4 + 2y = 4 + 2y,$$

lo cual es cierto para cualquier valor de y, por lo que el sistema tiene infinitas soluciones de la forma $x = 4 + 2y$, siendo y cualquier número real. Realicemos la verificación: sea y un número real fijo, y sea $x = 4 + 2y$. Veamos que estos valores satisfacen ambas ecuaciones del sistema dado:

$$3x - 6y = 3\underbrace{(4 + 2y)}_{x} - 6y = 12 + 6y - 6y = 12, \quad \checkmark$$

$$4x - 8y = 4\underbrace{(4 + 2y)}_{x} - 8y = 16 + 8y - 8y = 16. \quad \checkmark$$

Así, para cada número real y dado se obtiene un correspondiente valor de x, de manera que ambas igualdades se cumplen. Por ejemplo, cuando $y = 1$ el valor de x es $4 + 2 \cdot 1 = 6$, o cuando $y = 2$ entonces $x = 4 + 2 \cdot 2 = 8$. El sistema resulta entonces compatible indeterminado. «

Ejemplo 121. **Resolviendo por igualación: sin solución.** Resolver mediante el método de igualación el siguiente sistema y clasificarlo:

$$\begin{cases} -4x + 2y &= 6 \\ -2x + y &= 5. \end{cases}$$

Solución: Despejando y en ambas ecuaciones tenemos, luego de simplificar,

$$\begin{cases} y &= 3 + 2x \\ y &= 5 + 2x. \end{cases}$$

Ahora igualamos:

$$3 + 2x = 5 + 2x,$$

lo que equivale a $3 = 5$. Puesto que esta igualdad es falsa independientemente del valor de x, la ecuación no tiene solución, y por lo tanto tampoco la tendrá el sistema. En este caso, es un sistema incompatible. «

Tanto el método de sustitución como el de igualación presentan la misma eficacia y sencillez, por lo que si no se indica nada, se puede elegir cualquiera de ellos para resolver un sistema dado.

Aplicaremos lo aprendido sobre sistemas para resolver problemas concretos, como el siguiente.

Ejemplo 122. Las edades de Camila y de su mamá suman 54 años, y dentro de 9 años la edad de la mamá será el doble de la edad de Camila. ¿Cuántos años tiene cada una ahora?

Solución: Llamemos x a la edad de Camila ahora, e y a la edad actual de su mamá. Entonces, las respectivas edades dentro de 9 años serán $x+9$ e $y+9$. Los datos del problema nos dicen que

$$\begin{cases} x+y &= 54 & \text{(pues las dos edades suman 54 años)} \\ 2(x+9) &= y+9 & \text{(lo que ocurrirá en 9 años).} \end{cases}$$

Resolveremos este sistema por sustitución, despejando x de la primera ecuación:

$$x = 54 - y, \quad (\dagger)$$

y reemplazando en la segunda:

$$\begin{aligned} 2(54-y+9) = y+9 &\iff 2(63-y) = y+9 \\ &\iff 126 - 2y = y+9 \\ &\iff 117 = 3y \\ &\iff 39 = y. \end{aligned}$$

Esto significa que, luego de verificar, la edad de la mamá de Camila es 39 años, y de $(\dagger)$ tenemos que la edad de Camila es $x = 54 - 39 = 15$ años. «

Como mencionamos, retomaremos los sistemas presentados en esta sección en el Capítulo 5, para interpretarlos desde el punto de vista gráfico, y resolverlos también mediante GeoGebra.

Ejercicios 4.4

1. Resolver los sistemas planteados en los Ejemplos 84 y 85 de las páginas 96 y 97, respectivamente.

2. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por sustitución y clasificar cada uno según sus soluciones:

$$\textbf{(a)} \begin{cases} 2x - y &= 5 \\ x + 4y &= 7 \end{cases} \qquad \textbf{(b)} \begin{cases} 8x - 2y &= 5 \\ -12x + 3y &= 7 \end{cases}$$

$$\textbf{(c)} \begin{cases} x - y = 1 \\ 4x + 3y = 18 \end{cases} \qquad \textbf{(d)} \begin{cases} -2x + y = 1 \\ 6x - 3y = -3 \end{cases}$$

3. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por igualación y clasificar cada uno según sus soluciones:

$$\textbf{(a)} \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 4y = 14 \end{cases} \qquad \textbf{(b)} \begin{cases} x - 2y = 6 \\ -\frac{1}{2}x + y = -3 \end{cases}$$

$$\textbf{(c)} \begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + 2y = 2 \end{cases} \qquad \textbf{(d)} \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = 5 \end{cases}$$

4. Encontrar dos números tales que su suma sea 40 y su diferencia sea 14.

5. Carolina tiene hoy el triple de edad que su hijo José. Dentro de 15 años, la edad de Carolina será el doble que la de su hijo. ¿Cuántos años más que José tiene su madre hoy?

6. Hallar la medida de los lados de un rectángulo cuyo perímetro es 20 cm, sabiendo que el lado menor excede en 1 cm a la mitad del lado mayor.

7. Un puesto de frutas vende dos variedades de frutillas: pequeñas y grandes. Una caja de frutillas pequeñas se vende en $\$50$, y una de frutillas grandes se vende a $\$70$. En un día, el puesto vende 61 cajas de frutillas por un total de $\$3810$. ¿Cuántas cajas de cada tipo se vendieron?

8. Las edades de Franco y Clara suman 16 años, y dentro de 12 años, la edad de Clara superará en 4 años a la mitad de la edad de Franco. Determinar las edades que tienen hoy Franco y Clara.

9. El costo de las entradas a un teatro es de $\$80$ para los adultos y $\$50$ para los niños. Si el sábado pasado asistieron 248 personas y se recaudaron $\$15250$, ¿cuántos adultos y cuántos niños asistieron a la función el sábado?

10. En un estacionamiento hay 59 vehículos entre autos y motos. Si el total de ruedas es de 202, ¿cuántos autos y cuántas motos hay?

11. Una empresa que fabrica valijas recibe un pedido para un día determinado. Al planificar la producción determinan que si fabrican 250 valijas al día, faltarían 150 al concluir el plazo que tienen. Si fabrican 260 valijas diarias entonces les sobrarían 80. ¿Cuántos días tienen de plazo y cuántas valijas les encargaron?

12. La contraseña de wifi de una escuela posee 6 dígitos. Cuando un alumno la solicita, se le entrega la siguiente instrucción: las 3 primeras cifras corresponden a un número x, y las 3 últimas a un número y, los cuales satisfacen que $y - 2x = 169$ y $3x - y = 18$. ¿Cuál es la contraseña?

13. Melina compró una remera y gastó 185 pesos. La pagó entregando el importe justo, con 10 billetes de dos tipos: de 5 pesos y de 50 pesos. ¿Cuántos billetes de cada clase entregó?

14. En una cafetería se usan dos marcas de café, una de 6 pesos el kilo y otra de 8.50 pesos el kilo. El encargado quiere preparar una mezcla de las dos clases cuyo precio sea 7 pesos el kilo. ¿Cuántos gramos debe poner por kilo de cada marca?

15. Expresar lo siguiente como un sistema de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas y resolverlo:



Luego, utilizar lo obtenido para hallar el valor de:

(a) 

(b) 

4.5. Inecuaciones

Una **desigualdad** es una expresión que contiene alguno de los siguientes símbolos de orden:

$<$ (menor), $>$ (mayor), $\leq$ (menor o igual), $\geq$ (mayor o igual).

Las desigualdades que contienen alguno de los dos primeros símbolos se llaman **estrictas**, mientras que las que contienen alguno de los dos últimos se denominan **no estrictas**.

Una **inecuación** es una desigualdad entre dos expresiones conteniendo uno o más valores desconocidos.

Las expresiones que aparecen a ambos lados de los símbolos de la desigualdad se llaman **miembros**.

Las siguientes desigualdades son ejemplos de inecuaciones:

$$x^2 - 2 \geq 5x + 1, \qquad 3x + 2|x - 1| > 0,$$

$$x^4 - 3 < x^3 + 2x, \qquad \frac{(x-2)(x+3)}{x^2+6} \leq 0.$$

Las **soluciones** de una inecuación son todos los valores que hacen que la desigualdad sea cierta. Al igual que en el caso de las ecuaciones, cuando la inecuación esté modelando un problema concreto, habrá que elegir entre las soluciones de la inecuación aquellas que tengan sentido en el contexto del problema. La diferencia esencial con las ecuaciones es que las inecuaciones suelen tener infinitas soluciones, las cuales se representan mediante la notación de intervalo presentada en la Sección 2.3 del Capítulo 2.

Se dice que dos inecuaciones son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto de soluciones.

Aprenderemos a resolver inecuaciones que tengan solamente una incógnita. El proceso de resolución de inecuaciones se basa (igual que en el caso de las ecuaciones) en la transformación de la inecuación inicial en otra equivalente más sencilla. La única diferencia entre la resolución de una ecuación y una inecuación es que ciertas operaciones invierten el sentido de la desigualdad. Si bien a lo largo del Capítulo 2 hemos enunciado el efecto en las desigualdades de cada una de las operaciones, reuniremos aquí todas estas propiedades de orden para facilitar la lectura:

(o.1) $x \le y \iff x + c \le y + c$, para cualquier c real.

(o.2) $x \le y \iff x \cdot c \le y \cdot c$, para cualquier $c > 0$.

(o.3) $x \le y \iff x \cdot c \ge y \cdot c$, para cualquier $c < 0$.

(o.4) Si $x \cdot y > 0$: $x \le y \iff \frac{1}{x} \ge \frac{1}{y}$.

(o.5) Si $x, y > 0$: $x \le y \iff x^q \le y^q$, para cualquier $q > 0$.

(o.6) Si $x, y > 0$: $x \le y \iff \log_a x \le \log_a y$ cuando $a > 1$.

(o.7) Si $x, y > 0$: $x \le y \iff \log_a x \ge \log_a y$ cuando $0 < a < 1$.

Las mismas propiedades valen reemplazando los signos $\le$ (menor o igual) por $<$ (menor estricto), y los signos $\ge$ (mayor o igual) por $>$ (mayor estricto).

La propiedad **(o.1)** establece que si a los dos miembros de una inecuación se les suma (o resta) la misma cantidad, se obtiene una inecuación equivalente con la desigualdad en el mismo sentido: $2 < 3$ entonces $2+7 < 3+7$ y $2-7 < 3-7$.

Las propiedades **(o.2)** y **(o.3)** dicen que si se multiplican (o dividen) los dos miembros de una inecuación por una misma cantidad, se obtiene una inecuación equivalente con el mismo sentido de la desigualdad si esa cantidad es positiva, pero con el sentido contrario si esa cantidad es negativa: $2 < 3$ entonces $2 \cdot 5 < 3 \cdot 5$, pero $2 \cdot (-5) > 3 \cdot (-5)$.

La propiedad **(o.4)** establece que los recíprocos de números *con igual signo* (es decir, ambos positivos o ambos negativos), invierten el orden de la desigualdad: $2 < 3$ entonces $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$. También, $-5 < -4$ entonces $-\frac{1}{5} > -\frac{1}{4}$.

La monotonía de la potencia (y por lo tanto de la raíz) para bases *positivas* es lo que afirma la propiedad **(o.5)**, en cuyo caso el sentido de la desigualdad se preserva si el exponente es positivo*: $4 < 9$ entonces $\sqrt{4} < \sqrt{9}$ y $4^5 < 9^5$.

Sin embargo, si el exponente es negativo el sentido se invierte: $4 < 9$ entonces $4^{-\frac{1}{2}} > 9^{-\frac{1}{2}}$ y $4^{-5} > 9^{-5}$. Esto se prueba de forma general a partir de la definición de potencia con exponente negativo, combinando **(o.4)** y **(o.5)**:

(o.8) Si $x, y > 0$: $\quad x \leq y \iff x^q \geq y^q$, para cualquier $q < 0$.

Las propiedades **(o.6)** y **(o.7)** establecen que aplicar logaritmos en ambos miembros de una inecuación mantiene el sentido de la desigualdad cuando la base es mayor que 1, pero lo invierte cuando esta es menor que 1: $\log_2 4 < \log_2 9$ pero $\log_{\frac{1}{2}} 4 > \log_{\frac{1}{2}} 9$.

Ejemplo 123. **Resolviendo inecuaciones.** Resolver la inecuación $-2x + 1 \geq 7$.

Solución:

$$-2x + 1 \geq 7 \overset{\textbf{(o.1)}}{\iff} -2x \geq 6 \overset{\textbf{(o.3)}}{\iff} x \leq -3.$$

Luego, el conjunto solución es $S = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -3\}$, el cual puede expresarse también como el intervalo $(-\infty, -3]$, y representarse gráficamente como



«

Escribiendo en GeoGebra una inecuación *polinómica* en el campo de entradas, el software devuelve "franjas" correspondientes a los valores de x que satisfacen la inecuación. Los "bordes" de las franjas serán una línea llena para las desigualdades no estrictas, o una línea punteada para las desigualdades estrictas, indicando así si los extremos de los intervalos pertenecen o no al conjunto solución. Se propone ingresar en el campo de entradas las siguientes inecuaciones, para observar el resultado:

$$-2x + 1 \geq 7, \qquad -2x + 1 < 7.$$

Aplicaremos ahora la resolución de inecuaciones para resolver un problema concreto.

*No se infiere de esto que para bases negativas el sentido se invierte. Recordemos que las bases negativas se descartan al momento de enunciar propiedades ya que algunas no valen.

Ejemplo 124. Una empresa textil fabricó 1500 remeras con un costo de producción de \$30 por unidad. Si se venden todas las remeras, se obtiene una ganancia que supera los \$60000. ¿A qué precio se vende al menos cada unidad?

Solución: Llamemos x al precio de venta (en pesos) de cada unidad. Por cada unidad vendida, la ganancia es igual a $x-30$. El enunciado afirma que la ganancia de vender todas las remeras (es decir, $1500(x-30)$) supera los 60000 pesos. Esto se expresa simbólicamente y se resuelve como:

$$1500(x-30) > 60000 \overset{\textbf{(o.2)}}{\iff} x - 30 > \frac{60000}{1500} \overset{\textbf{(o.1)}}{\iff} x > 40 + 30 = 70.$$

Luego, la solución es el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} : x > 70\} = (70, \infty)$. Esto significa que cada remera se vende a más de \$70. «

Como se ve en los ejemplos anteriores, el proceso para resolver una inecuación consiste en ir transformando la inecuación inicial en otras equivalentes más simples, hasta que el resultado final sea de uno (o varios) de los siguientes tipos:

$$x < c, \qquad x \le c, \qquad x \ge c, \qquad x > c,$$

donde x denota la incógnita. Si se llega a más de una de estas inecuaciones, según el caso estas pueden estar conectadas con un "o", por lo que deberán unirse los correspondientes conjuntos solución, o con un "y", donde habrá que tomar la intersección de dichos conjuntos. Si el resultado final es contradictorio, entonces la inecuación no tiene soluciones. Ilustramos estos casos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 125. **Inecuaciones conectadas con "o".** Resolver $(x+3)^2 \ge 16$.

Solución:

$$(x+3)^2 \ge 16 \overset{\textbf{(o.5)}}{\iff} \sqrt{(x+3)^2} \ge \sqrt{16} \iff |x+3| \ge 4.$$

Por la propiedad (**g**) del valor absoluto (ver página 48), la última desigualdad ocurre si y solo si

$$x + 3 \ge 4 \quad \text{o} \quad x + 3 \le -4,$$

es decir

$$x \ge 1 \quad \text{o} \quad x \le -7.$$

El conjunto solución de la primera desigualdad es $S_1 = [1, \infty)$, y el de la segunda es $S_2 = (-\infty, -7]$. Puesto que las desigualdades están conectadas con un "o",

NO CORRESPONDE

Factor \ Intervalo	$(-\infty,-3)$	$(-3,-1)$	$(-1,1)$	$(1,6)$	$(6,\infty)$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-6$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x+3)(x^2-1)}{x-6}$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

NO CORRESPONDE

De la tabla se deduce que el conjunto solución es $S = [-3,-1] \cup [1,6)$. Notar que si bien la desigualdad no es estricta, incluimos todos los extremos excepto el 6, pues es un valor no permitido en la operación ya que anula el denominador, y la división por cero no está definida.

Ejercicios 4.5

1. Resolver el problema planteado en el Ejemplo 86 de la página 97, suponiendo que solamente se consideran números naturales para las edades.

2. La ganancia de una empresa que vende paletas para tenis de mesa viene dada por $G(x) = 5(3x-7) - 8(x+10)$, siendo x el número de unidades vendidas. ¿A partir de cuántas unidades vendidas la empresa obtiene ganancias?

3. Una empresa tiene unos costos de producción fijos de \$2400, más \$12 por cada unidad de producto fabricada. Sabiendo que el precio de venta de cada unidad de producto es de \$16, calcular a partir de cuántas unidades vendidas la empresa tiene beneficios.

4–25. Resolver las inecuaciones.

4. $5(4-3x) \geq 2$

5. $-2(-3x+5) < 2(x+3)$

6. $2(x-2) + 3x < 5x + 6$

7. $\frac{3(x-1)}{2} - x > \frac{x-3}{2}$

8. $|5t-9| > 1$

9. $|-3-2y| \leq 4$

10. $-2|x+1| + 8 < 0$

11. $|3-t| - 5 \geq 0$

Capítulo 5

Funciones

5.1. El concepto de función

En matemática, una **función** es una regla que asigna a cada elemento de un conjunto A un único elemento de un conjunto B. Esto significa que, dado un elemento $x \in A$, le corresponde un único valor que pertenece al conjunto B, al cual denotamos por $f(x)$. Escribimos:

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Lo anterior se lee "f es una función de A en B". En el renglón de abajo se indica qué valor de B se le asigna a cada $x \in A$, y $f(x)$ se lee "f de x". El conjunto A se llama **dominio** de f o **conjunto de partida** mientras que B se llama **conjunto de llegada**.

Por ejemplo, supongamos que en un empleo se paga $\$150$ por cada hora que se trabaja. Entonces la regla

$$x \mapsto 150x$$

es una función que nos dice el salario obtenido al trabajar x horas. Este salario depende, obviamente, de la cantidad de horas trabajadas, lo que se expresa también como "el salario es función de las horas trabajadas".

En forma general, se dice que **una cantidad y es función de otra cantidad x**, si el valor de la primera depende del valor que tome la segunda. Para simbolizar esto se escribe

$$y = f(x).$$

Para indicar en palabras lo anterior, decimos:

y es la **imagen** de x a través de f.

El significado de ambas expresiones es el mismo: que y es el resultado de aplicar la regla f a un determinado valor x. Por eso decimos que x es la **variable independiente**, mientras que y es la **variable dependiente**, ya que su valor depende del valor que tome x.

Para fijar estos conceptos, veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 137. **Evaluando una función.** Consideremos la regla $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Es decir, la función f que va de los reales en los reales, tal que a cada x real le asigna su cuadrado x^2. En la siguiente tabla, vamos a calcular la imagen a través de esta función de algunos valores del dominio de f:

x	$f(x)$
-2	$(-2)^2 = 4$
-1	$(-1)^2 = 1$
0	$0^2 = 0$
$\frac{5}{3}$	$\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$
$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2})^2 = 2$
2	$2^2 = 4$
5	$5^2 = 25$

«

En la definición de "función" hay dos condiciones que no deben pasarse por alto: **existencia y unicidad de imagen**. Esto significa que para cada valor x en el dominio debe **existir** un **único** valor en el conjunto de llegada que sea imagen de x. Para ilustrarlo, supongamos que hay un concurso de baile, y tenemos el conjunto A formado por los jurados, y el conjunto B formado por los participantes del concurso. Cada jurado vota por quién piensa que debería ser el ganador:

$$\text{jurado} \mapsto \text{participante elegido.}$$

Pero existe una condición: no se puede votar en blanco o no votar, ni se puede elegir a dos candidatos. Es decir, cada jurado debe elegir un único ganador del concurso. Votar en blanco (o no votar) representa la no existencia de imagen, mientras que elegir a dos candidatos significa la no unicidad de ella. El requisito establecido sobre el voto es lo que convierte a la relación "elección de ganador" en una función.

Ejemplo 138. **No es función.** Sea $f(x) = \sqrt{x}$. ¿Podemos determinar si es o no función? No, no podemos porque la definición está incompleta, ya que la fórmula sola no es suficiente. Para definir una función hay que indicar además

su dominio y conjunto de llegada. Esto puede cambiar la decisión, como veremos a continuación. Sean

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} & \qquad g : [0, \infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x} & \qquad x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

Las asignaciones f y g se definen mediante la misma fórmula, pero tienen distintos dominios, por lo tanto, son distintas. De hecho, como veremos ahora, f no es función, mientras que g sí lo es. En efecto, f no es función porque para algunos elementos del dominio no existe imagen en el conjunto de llegada:

$$f(-4) = \sqrt{-4} \rightsquigarrow \text{ no existe en } \mathbb{R}.$$

Lo mismo ocurre con cualquier otro número negativo, pues la raíz cuadrada de un número negativo no está definida en los reales. Al no cumplir una de las dos condiciones, en este caso la existencia de imagen, f no es función. Sin embargo, para cada número no negativo x, el símbolo $\sqrt{x}$ denota al único real no negativo r que satisface $r^2 = x$. Por lo tanto g sí resulta ser función. «

Como vimos en el ejemplo anterior, explicitar el dominio es parte importante al momento de definir una función. Sin embargo, existe una **convención** sobre dominios cuando el mismo no esté dado, y consiste en tomar como dominio el mayor conjunto de números reales x para los cuales $f(x)$ es también un número real. Utilizamos

$$\mathrm{Dom}(f) \quad \text{o} \quad \mathrm{D}_f$$

para denotar el dominio de una función f.

Ejemplo 139. **Determinando el dominio.** Hallar el dominio de la función definida por $f(x) = \sqrt{2x - 5}$.

Solución: Debido a la convención mencionada, el dominio son todos aquellos valores de x tales que $\sqrt{2x - 5}$ sea un número real. Puesto que la raíz cuadrada está definida para números mayores o iguales que cero, queremos que todo el radicando lo sea. Es decir, $f(x)$ está definida si y solo si

$$2x - 5 \geq 0.$$

Esta inecuación es equivalente a $x \geq \frac{5}{2}$. Es decir, $\mathrm{Dom}(f) = \left[\frac{5}{2}, \infty\right)$. «

Ejemplo 140. **Determinando el dominio.** Hallar el dominio de $g(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$.

Solución: Para que la función g esté definida necesitamos dos condiciones: que el radicando involucrado no sea negativo, y que el denominador no sea cero. Esto se traduce en

$$4 - x^2 \geq 0 \qquad \text{y} \qquad x - 1 \neq 0.$$

NO CORRESPONDE

Es claro que la última condición se cumple siempre que $x \neq 1$. Con respecto a la primera, resolviendo tenemos que

$$4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 4 \geq x^2 \Leftrightarrow 2 \geq |x| \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2.$$

NO CORRESPONDE

Por lo tanto $\mathrm{Dom}(f) = [-2, 2] - \{1\} = [-2, 1) \cup (1, 2]$. «

Se dice que una función f es **polinómica** si es de la forma

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

es decir, si la expresión que la define es un polinomio.

Notar que si f es una función polinómica, entonces $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

Para entender el próximo concepto a definir, volvamos a la función f dada en el Ejemplo 137, definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ como $f(x) = x^2$. Nos preguntamos si, por ejemplo, el número -4 es imagen de algún real x. En otras palabras, ¿existe algún número x real tal que su cuadrado sea igual a -4? Claramente la respuesta es **no**, pues al elevar al cuadrado cualquier número se obtiene como resultado otro número positivo o cero. Luego, no todo elemento en el conjunto de llegada es imagen de algún elemento en el dominio. Todos los que sí son imágenes de algún elemento del dominio se coleccionan en un conjunto llamado **imagen** del dominio bajo f, el cual se denota y define formalmente como

$$\mathrm{Img}(f) = \{y \in B : y = f(x) \text{ para algún } x \in A\},$$

siendo f una función definida de A en B. De la definición se sigue que la imagen está contenida en el conjunto de llegada. Resumiendo:

Dominio de f: todos los valores x tales que $f(x)$ está definida,

Imagen de f: todos los posibles resultados al efectuar $f(x)$.

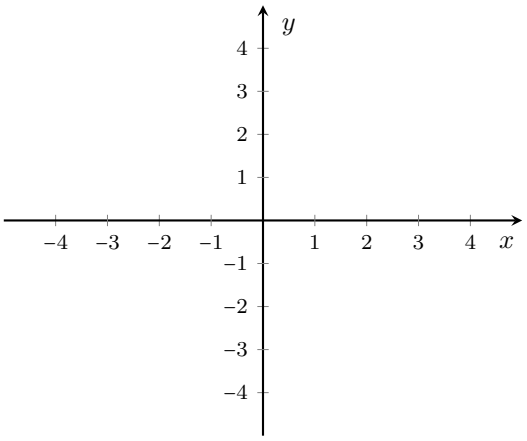
Ejemplo 141. **Algunas imágenes.** Por lo mencionado arriba, para la función f del Ejemplo 137 tenemos que

$$\mathrm{Img}(f) = [0, \infty).$$

En el ejemplo del concurso de baile, la imagen se forma con todos los participantes que recibieron algún voto. Los que no recibieron ningún voto, son parte del conjunto de llegada pero no de la imagen de la función "elección de ganador", ya que no existe un jurado (en este caso son quienes forman el dominio) que haya votado por ellos. ☹

Para funciones polinómicas, existen infinitas posibilidades para la imagen, que dependerán de cada caso en particular. «

Hasta ahora hemos representado funciones mediante su ecuación, es decir, dando la expresión que la define. Otra forma de representar una función es mediante su gráfica. Para ello, necesitamos primero el concepto de **ejes cartesianos** o **coordenados**, que son simplemente un par de rectas numéricas perpendiculares que nos permitirán ubicar puntos en el plano:



Ejes cartesianos.

La recta horizontal se llama **eje x** o **eje de las abscisas**, mientras que la recta vertical recibe el nombre de **eje y** o **eje de las ordenadas**. Llamaremos **origen** de coordenadas al punto donde se cruzan las dos rectas, que corresponde al cero en ambas direcciones. A la izquierda del origen, en el eje de las abscisas, se encuentran los valores negativos, y a la derecha los positivos. En el eje de las ordenadas, hacia arriba del origen se encuentran los valores positivos y hacia abajo, los negativos.

Un punto en el plano se localiza con un **par ordenado** de valores (x, y) llamados **coordenadas**, siendo el número x la **abscisa** del punto, y el número y su **ordenada**. Luego, la primera componente del par se localiza en el eje de las abscisas, y la segunda en el eje de las ordenadas. Al trazar las paralelas a cada uno de los ejes desde esos puntos, las líneas resultantes se intersecan* en un punto que es el lugar buscado.

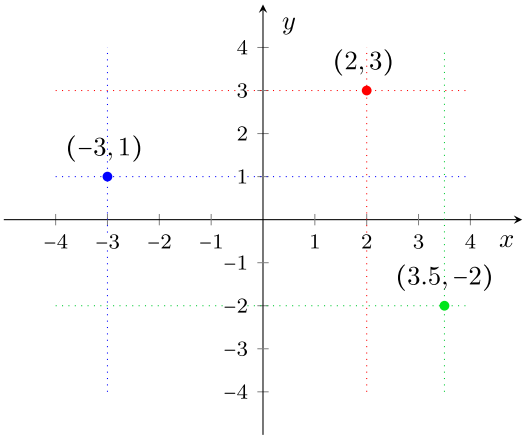
La primera coordenada de un punto indica el desplazamiento horizontal desde el origen de coordenadas (hacia la derecha si es positiva, o hacia la izquierda si es negativa), mientras que la segunda indica el desplazamiento vertical (hacia arriba si es positiva, o hacia abajo si es negativa). El origen representa al punto de coordenadas $(0, 0)$, el cual suele denotarse con la letra O.

*Dos curvas se intersecan si se cortan entre sí.

Ejemplo 142. **Ubicando puntos en el plano.** Representar en un sistema de ejes cartesianos los puntos

$$P = (2, 3), \quad Q = (-3, 1) \quad \text{y} \quad R = (3.5, -2).$$

Solución: Para ubicar al punto P vamos hasta el 2 en el eje x y trazamos una recta paralela al eje y allí. Luego hacemos lo mismo en el valor 3 sobre el eje y (ahora la recta será paralela al eje x), y donde se cortan ambas rectas se ubica el punto P (en color rojo en el gráfico siguiente). Los otros dos puntos los ubicamos de la misma forma (azul para el punto Q y verde para R).



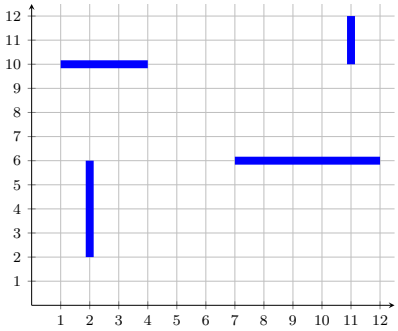
«

Así, a cada par ordenado de números reales le corresponde un punto en el plano, y recíprocamente, a cada punto del plano le corresponde un par ordenado determinado por su posición.

En GeoGebra, un punto se ingresa escribiendo en el campo de entradas su nombre y coordenadas, por ejemplo P=(2,3). Desde el menú gráfico, también es posible agregar un punto seleccionando la herramienta  y haciendo clic en algún lugar de la vista gráfica. El software nos dará las coordenadas del punto ingresado.

Ejemplo 143. **Batalla naval.** La "Batalla naval" es un juego de estrategia que consiste en destruir la flota de nuestro adversario a través de misiles, los cuales serán dirigidos por medio de coordenadas. Cada competidor deberá ubicar en un sistema de ejes una cierta cantidad de naves, las cuales pueden ocupar 2, 3, 4, o 5 casillas, según el tipo de embarcación que sea. Para ello dispondrá de una grilla, de la cual solamente puede usar valores enteros para ambas coordenadas, entre 1 y 12 (este rango es arbitrario, para poner algún límite), y las naves no

pueden ubicarse en diagonal ni tocarse dos en el mismo sentido. El objetivo es hundir todas las naves del rival, acertando misiles en cada una de las casillas ocupadas por cada nave. En el siguiente gráfico ubicamos 4 naves para ilustrar la situación.



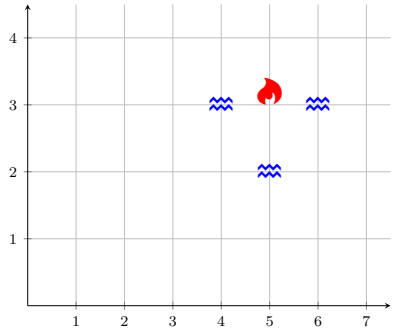
Cuando un misil acierta una nave rival, el participante a cargo de esa flota debe decir "Tocado", y cuando todas las casillas ocupadas por la nave fueron tocadas por un misil, debe decir "Tocado y hundido". Si un misil no impacta en ninguna nave, debe decir "Agua".

Supongamos que se tiene la siguiente situación:

- Un misil lanzando a la posición $(5, 3)$ da como resultado "Tocado".
- Misiles en las posiciones $(6, 3)$, $(4, 3)$ y $(5, 2)$ dan en "Agua".

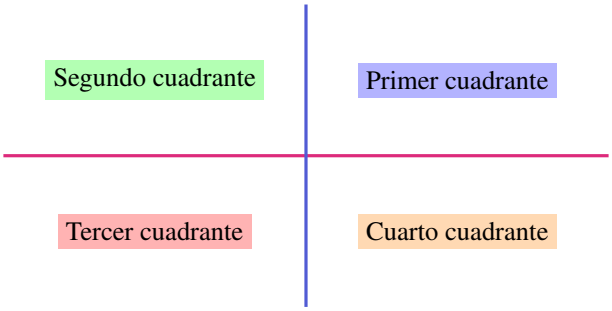
¿Dónde deberá lanzarse el próximo misil para asegurar que se volverá a tocar la nave?

Solución: La situación se ilustra como sigue:



Por lo tanto, para asegurarnos de que el próximo misil toque a la nave, el disparo deberá dirigirse a la posición $(5, 4)$. «

Los ejes cartesianos dividen al plano en cuatro regiones llamadas **cuadrantes**, que se numeran en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj, como se indica en el siguiente gráfico:



Entonces, el signo que posean las coordenadas de un punto determina la posición en los cuadrantes:

- **Primer cuadrante:** abscisa positiva y ordenada positiva.
- **Segundo cuadrante:** abscisa negativa y ordenada positiva.
- **Tercer cuadrante:** abscisa negativa y ordenada negativa.
- **Cuarto cuadrante:** abscisa positiva y ordenada negativa.
- **Eje horizontal:** ordenada cero, cualquier abscisa.
- **Eje vertical:** abscisa cero, cualquier ordenada.

Si f es una función con dominio en un subconjunto A de los números reales, entonces la **gráfica** de f es el conjunto de todos los puntos de la forma $(x, f(x))$, para $x \in A$:

$$\text{gráfica de } f = \{(x, y) : x \in A, y = f(x)\}.$$

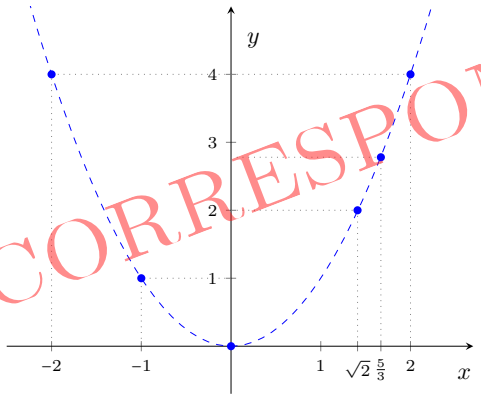
Un método para dibujar la gráfica de una función f es representar suficientes puntos de manera que se pueda sospechar cuál es la forma de la gráfica. Entonces se unen los puntos marcados con una línea. En las secciones siguientes veremos que para ciertas funciones podemos identificar la forma de antemano, de acuerdo a la ecuación que la define. En esos casos, esbozar el gráfico de la función es más rápido y sencillo.

Ejemplo 144. **Esbozando el gráfico de una función mediante puntos.** Retomemos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ dada en el Ejemplo 137. Allí hicimos una tabla con las imágenes correspondientes a algunos valores del dominio. Esto nos generó los siguientes pares ordenados:

$$(-2, 4), \quad (-1, 1), \quad (0, 0), \quad \left(\tfrac{5}{3}, \tfrac{25}{9}\right), \quad (\sqrt{2}, 2), \quad (2, 4), \quad (5, 25).$$

En el gráfico siguiente representamos estos puntos. Si agregamos varios puntos más, podemos esbozar la forma de la gráfica de la función, que corresponde a una *parábola*, la cual marcamos con línea punteada. Las parábolas serán estudiadas en detalle en la Sección 5.5.

NO CORRESPONDE



NO CORRESPONDE

«

Hasta ahora vimos cómo representar gráficamente una función, pero es fundamental en este punto comprender la información que nos brinda. Teniendo la gráfica, para conocer el valor de la función en un valor x cualquiera del dominio, es suficiente con "caminar" sobre el eje horizontal hasta llegar a dicho valor, y "mirar" hacia arriba o hacia abajo, hasta encontrar el gráfico de la función (la existencia y unicidad de la imagen asegura que el gráfico se encuentra, y que se encuentra una única vez). La altura a la que se halla el punto que encontramos al "mirar", corresponde al valor de f en x (será positivo si la gráfica queda hacia arriba del eje horizontal, o negativo si queda hacia abajo).

Ejemplo 145. **Interpretando el gráfico de una función.** Supongamos que el gráfico en la Figura 5.1 representa los registros de la presión arterial (en milímetros de mercurio, denotados como mmHg) de un paciente durante un período de tiempo medido en horas*. En el eje horizontal se representan las horas transcurridas desde su internación, y en el vertical, la presión del paciente en cada instante de tiempo (en mmHg)†. Las mediciones comienzan un lunes a las 7 de la mañana (lo que consideramos como tiempo $t = 0$), momento en el que el paciente queda internado. Observando el gráfico, determinar:

(a) ¿Qué presión tenía el paciente al momento de la internación?

(b) ¿Durante cuánto tiempo se tomaron las mediciones?

(c) ¿Qué presión tenía el paciente el día miércoles a las siete de la mañana? ¿En cuántos momentos tuvo la misma presión?

(d) ¿Cuál fue la presión mínima y cuándo la alcanzó? ¿Y la máxima?

(e) ¿En qué momento la presión fue en aumento? ¿Y en disminución?

(f) ¿En qué momento la presión se mantuvo constante y cuál fue ese valor?

*Datos extraídos de `http://unrn.edu.ar/blogs/RRP-Roca/files/2014/04/TP-Funciones-Interpretacion.pdf`. Consultado en agosto de 2018.

†En el lenguaje coloquial suele utilizarse, por ejemplo, "18" para referirse a una presión de 180 mmHg.



Figura 5.1: Registro de la presión arterial de un paciente.

(g) ¿Cuántos días transcurrieron hasta que el paciente consiguió mantener una presión constante por 24 horas?

Solución:

(a) Al momento de internarse el paciente tenía 200 mmHg de presión arterial.

(b) Las mediciones se tomaron por 96 horas, es decir, durante 4 días.

(c) El día miércoles a las siete de la mañana corresponde a 48 horas luego de la internación. Según el gráfico, la presión era de 160 mmHg. Ese mismo valor lo tuvo además en otros dos momentos (aproximadamente a las 2 horas luego de internarse, y a las 68 horas).

(d) La presión mínima fue de 60 mmHg, y la alcanzó a las 16 horas después de internarse (es decir, el lunes a la hora 23:00). La presión máxima fue de 200 mmHg, y se alcanzó al momento de internarse y a las 56 horas desde el momento de la internación, lo que corresponde al día miércoles a la hora 15:00.

(e) La presión aumentó entre las 16 y 32 horas desde la internación, y también entre las 40 y 56 horas. Esto corresponde al período entre el día lunes a las 23:00 y el día martes a las 15:00, y desde el martes a la hora 23:00 hasta el miércoles a las 15:00. La presión disminuyó durante las primeras 16 horas de internación, y también desde las 56 hasta las 72 horas, lo que se corresponde con el período entre la hora 15:00 del día miércoles, hasta la hora 7:00 del día jueves.

(f) La presión se mantuvo constante en 120 mmHg durante dos momentos: desde las 32 horas de internación hasta las 40 (desde el miércoles a las tres de

la tarde hasta las once de la noche), y desde las 72 horas hasta las 96 (desde el jueves a las siete de la mañana hasta el viernes a la misma hora).

(g) El paciente consiguió mantener su presión constante por 24 horas luego de 72 horas desde el día de internación, es decir, luego de 3 días. «

Ejemplo 146. **Interpretando gráficos: Tiro de proyectil.** La gráfica en la Figura 5.2 corresponde a la altura de un objeto en función del tiempo transcurrido, desde el momento de su lanzamiento hasta que llega al suelo. Observando el gráfico, determinar:

(a) ¿Cuánto tiempo demoró el objeto en llegar al suelo?

(b) ¿Cuál fue la altura máxima alcanzada, y en qué momento la alcanzó?

(c) ¿A qué altura se encontraba a los 3 segundos luego de su lanzamiento? ¿Alcanzó esa altura en algún otro momento?

(d) ¿En qué momentos se encontraba a una altura aproximada de 7 metros?

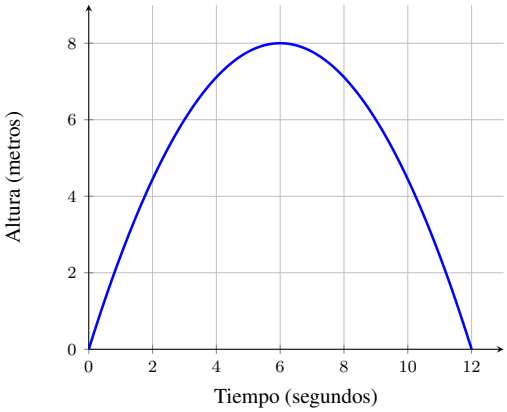


Figura 5.2: Altura del objeto en cada instante.

Solución: Es muy importante observar el gráfico para comprender el por qué de las siguientes respuestas:

(a) Demoró 12 segundos en llegar al suelo.

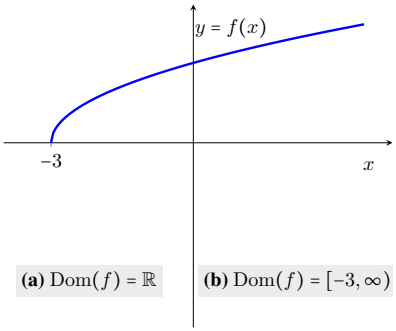
(b) La altura máxima alcanzada fue de 8 metros, a los 6 segundos luego de haber sido lanzado.

(c) A los 3 segundos se encontraba a una altura aproximada de 6 metros, al igual que a los 9 segundos.

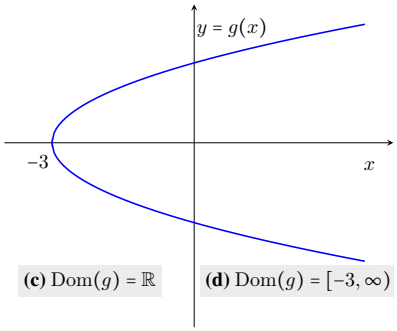
(d) El objeto alcanzó una altura de 7 metros aproximadamente a los 4 y 8 segundos posteriores al lanzamiento. «

El gráfico de una curva también nos permite determinar si corresponde o no al gráfico de una función. Como mencionamos, uno debe desplazarse por cada valor del dominio (en el eje horizontal) y "mirar" verticalmente (hacia arriba o abajo) hasta encontrarse con la curva. Esto corresponde a trazar líneas verticales imaginarias recorriendo el dominio, hasta cortar a la curva. Para que sea función, **cada una de estas rectas verticales debe cortar una y solo una vez al gráfico**. Si no lo corta, ese valor no tiene imagen por lo que no cumple con la existencia. Si lo corta más de una vez, no cumple con la unicidad de imagen. Lo ilustramos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 147. **Determinando gráficamente si es función.** Determinar si los siguientes gráficos corresponden a funciones en cada uno de los dominios dados.



(a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ **(b)** $\text{Dom}(f) = [-3, \infty)$



(c) $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$ **(d)** $\text{Dom}(g) = [-3, \infty)$

Solución:

(a) El gráfico de f **no corresponde** al de una función con dominio $\mathbb{R}$, ya que si nos situamos sobre el eje horizontal en algún valor a la izquierda de -3, y trazamos una recta vertical, esta no corta a la curva, lo que significa que no existe imagen a través de f para ese valor.

(b) El gráfico de f **corresponde** al de una función con dominio $[-3, \infty)$, porque si nos situamos sobre cualquier valor en el eje x que pertenezca a dicho intervalo, y trazamos una recta vertical, esta cortará al gráfico exactamente una vez. Es decir, cumple con la existencia y unicidad de imagen para cada $x \in [-3, \infty)$.

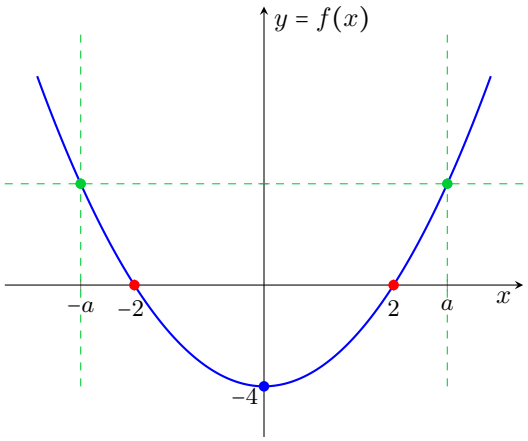
(c) El gráfico de g **no corresponde** al de una función con dominio $\mathbb{R}$, ya que si nos situamos en algún valor de x a la izquierda de -3 y trazamos una recta vertical, esta no corta a la curva, lo que significa que no existe imagen a través de g para dicho valor. Esto ya es suficiente para afirmar que no es la gráfica de una función con dominio $\mathbb{R}$, pero notar que tampoco satisface con la unicidad de imagen para los valores $x \geq -3$ pues, si nos situamos en uno de estos valores y trazamos una recta vertical, esta corta al gráfico en dos puntos (arriba y abajo del eje horizontal).

(d) El gráfico de g **no corresponde** al de una función con dominio $[-3, \infty)$, ya que no satisface la unicidad de imagen para los valores $x \geq -3$: si nos situamos en uno de estos valores sobre el eje horizontal y trazamos una recta vertical, esta corta al gráfico dos veces. «

Finalmente, notar que el gráfico de una función también nos permite detectar la imagen de la misma. Recordemos que la imagen de una función es el conjunto de valores obtenidos al aplicar f a todos los elementos del dominio, es decir, aquellos alcanzados por la función. Para determinarlos, debemos mirar el eje y e identificar qué valores alcanza la función, y cuáles no. Esto corresponde a trazar **rectas horizontales**, y ver cuáles cortan a la gráfica (no importa cuántas veces) y cuales no.

Por ejemplo, para el caso del tiro de proyectil, podemos observar en el gráfico (ver Figura 5.2) que el objeto nunca superó los 8 metros de altura, y tampoco estuvo debajo del nivel del suelo. Esto nos dice que la imagen de la función representada es $[0, 8]$. Para el gráfico de la presión arterial (ver Figura 5.1), se observa que los valores se mantuvieron entre 60 y 200 mmHg, por lo que la imagen de la función es el conjunto $[60, 200]$.

Ejemplo 148. **Determinando gráficamente la imagen.** Determinar la imagen de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuyo gráfico se incluye a continuación:



Solución: En el gráfico puede verse, por ejemplo, que $f(0) = -4$ (marcamos el punto $(0, f(0))$ con azul). En otras palabras, $-4 \in \mathrm{Img}(f)$ pues es la imagen del cero a través de f. También podemos ver que $f(2) = f(-2) = 0$ (puntos marcados en color rojo), por lo que el cero es imagen tanto de 2 como de -2. De manera general, si nos situamos en cualquier punto sobre el eje y por encima de $y = -4$ y trazamos una recta horizontal, vemos que siempre corta al gráfico

en dos puntos (representados en color verde), y que si trazamos una recta por debajo de $y = -4$, esta no corta a la gráfica. De todo esto, y suponiendo que la gráfica continúa de igual modo hacia arriba, podemos concluir que

$$\text{Img}(f) = [-4, \infty).$$

En el ejemplo anterior, los puntos representados en color rojo reciben un nombre especial. Se dice que un valor x^* perteneciente al dominio de una función f es **raíz** de f si

$$f(x^*) = 0.$$

Es decir, se llama raíz de una función f a todo valor del dominio tal que, si le aplicamos f, obtenemos el valor cero como resultado. Gráficamente, esto significa que el punto $(x^*, 0)$ pertenece al gráfico de f, o equivalentemente, la gráfica de f "corta" al eje horizontal en dicho valor x^*. Las raíces de una función también se conocen como **ceros** de dicha función, pues son las soluciones de la ecuación

$$f(x) = 0.$$

 Entonces, en el último ejemplo los ceros o las raíces de f son $x = 2$ y $x = -2$.

Ejemplo 149. **Determinando raíces analíticamente.** Hallar las raíces de la función $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$.

Solución: Observar primero que al ser una función polinómica, el dominio de f es $\mathbb{R}$. Para hallar las raíces debemos resolver la ecuación

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0.$$

Como vimos en el capítulo anterior, la forma de resolver este tipo de ecuaciones es factorizando el polinomio del miembro izquierdo, para aplicar luego la propiedad de producto cero. Para factorizar, notar que $f(1) = 0$, por lo que $x - 1$ es divisor del polinomio (por el teorema del resto). Aplicamos entonces la regla de Ruffini para dividir

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 4 & 1 & -6 \\ 1 & & 1 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 0 \end{array}$$

Luego,

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x - 1)(x^2 + 5x + 6).$$

Aplicando la resolvente para $x^2 + 5x + 6 = 0$, obtenemos $x_1 = -2$ y $x_2 = -3$. Así,

$$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x - 1)(x + 2)(x + 3),$$

por lo que el conjunto de raíces de f es $\{1, -2, -3\}$.

Con la gráfica de una función en GeoGebra, los puntos de corte con los ejes pueden encontrarse mediante el comando Interseca, el cual tiene también su ícono gráfico , ya que es una de las herramientas frecuentes. Una vez elegida la herramienta, bastará con cliquear sobre la gráfica de la función y sobre uno de los ejes para obtener los puntos de intersección. Si el eje elegido es el horizontal, tenemos así otra forma de obtener las raíces de la función.

Ejemplo 151. Determinar el dominio y los ceros de la función

$$g(x) = \sqrt{x-1}\,\log_3(x+5).$$

Solución: Comencemos determinando el dominio. Para que la raíz esté definida en los reales, el radicando no debe ser negativo. Además, el logaritmo solamente existe para números positivos, lo que nos da las condiciones

$$x - 1 \geq 0 \quad \text{y} \quad x + 5 > 0.$$

La intersección de los conjuntos solución de estas inecuaciones es $[1, \infty)$. Luego, $\mathrm{Dom}(g) = [1, \infty)$. Para hallar las raíces, debemos resolver la ecuación

$$\sqrt{x-1}\log_3(x+5) = 0.$$

Por la propiedad del producto cero, esto es equivalente a

$$\sqrt{x-1} = 0 \quad \text{o} \quad \log_3(x+5) = 0.$$

Resolvamos estas ecuaciones:

$$\sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1,$$

y por definición de logaritmo tenemos

$$\log_3(x+5) = 0 \Leftrightarrow 3^0 = x + 5 \Leftrightarrow 1 = x + 5 \Leftrightarrow x = -4.$$

Este último valor no pertenece al dominio de g, por lo que se descarta como raíz. Luego, la única raíz de g es $x = 1$. «

Ejemplo 152. Google Trends y algo de fútbol. La herramienta Google Trends permite obtener la tendencia de búsquedas realizadas de un tema o palabra clave, en una región geográfica específica y en un determinado período de tiempo, elegido a partir del año 2004. Google Trends **no** indica el número de visitas. Los números reflejan el interés de búsqueda, con valores relativos basados en una escala de 0 a 100, donde 100 representa el punto más alto en niveles de búsquedas realizadas. Eso quiere decir que 100 es el valor máximo de interés de

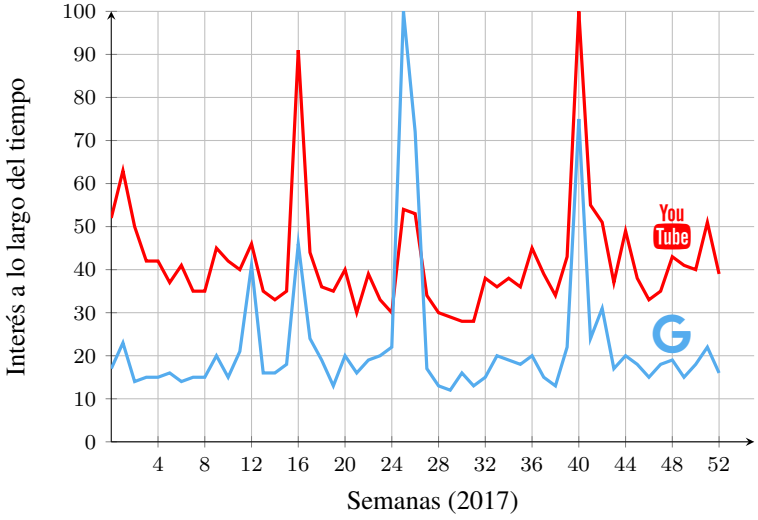
NO CORRESPONDE

búsqueda para el tiempo y el lugar seleccionados, e indica la popularidad máxima de un término, mientras que 50 indica que un término es la mitad de popular en relación con el valor máximo.

Por ejemplo, si en un determinado día y lugar la palabra más buscada tuvo 40000 búsquedas en Google, y nuestra palabra clave tiene un nivel de interés igual a 50, significa que fue buscada unas 20000 veces en ese mismo día y lugar. Si tiene un nivel de 30, fue buscada 12000 veces. Es decir, la función nos brinda un porcentaje de búsqueda con respecto a la palabra más buscada, en el mismo tiempo y lugar.

Los datos de Google Trends se obtienen de las búsquedas en la web mediante Google, pero también permite elegir si las mismas se realizaron en YouTube.

Como ejemplo, veamos el resultado que arroja Google Trends si ponemos como término de búsqueda "Lionel Messi", eligiendo Argentina como región geográfica, y el año 2017 como período de tiempo. Incluimos a continuación, en un mismo gráfico, los resultados para la búsqueda en la web y en YouTube.



Teniendo en cuenta el gráfico anterior, resolver lo siguiente:

(a) ¿En qué semana de 2017 fue "Lionel Messi" uno de los términos más buscados en Google en Argentina?

(b) ¿En qué semana de 2017 fue "Lionel Messi" uno de los términos más buscados en Youtube en Argentina?

(c) En la semana 16, ¿fue más popular en Google o en YouTube?

(d) Durante la semana 12 de 2017 ocurrió el partido en el cual Lionel Messi fue suspendido por cuatro partidos por la FIFA, lo que le impidió jugar con la selección Argentina hasta la última fecha de las eliminatorias, frente a

Ecuador en Quito. ¿Qué nivel de popularidad tuvo este suceso en Argentina, tanto en Google como en YouTube?

(e) Supongamos, solamente para hacer cálculos, que en la semana 20 lo más popular en Google tuvo 600000 búsquedas en Argentina, mientras que lo más popular en YouTube tuvo 800000. Determinar en número de búsquedas para "Lionel Messi" en ambos sitios para esa semana en Argentina.

Solución:

(a) "Lionel Messi" fue uno de los términos más buscados en Google en Argentina en la semana 25 de 2017 (correspondiente a la fecha de su casamiento).

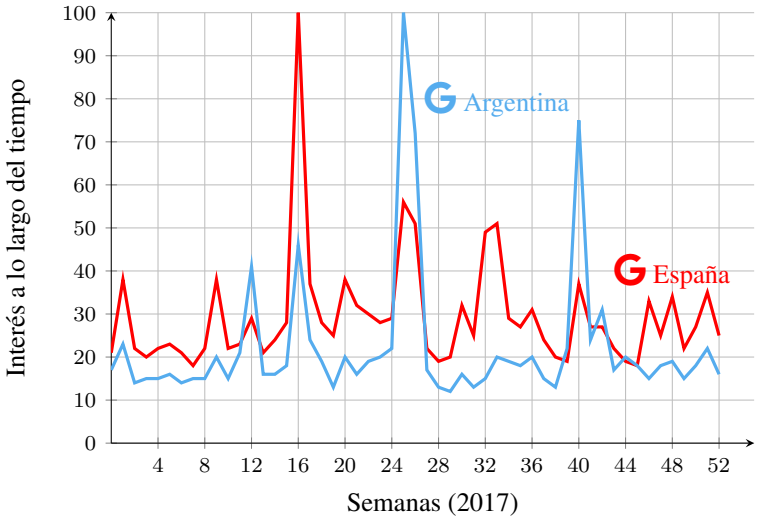
(b) En el caso de YouTube, fue uno de los términos más buscados en Argentina en la semana 40 (cuando Messi convirtió tres goles en Quito ante Ecuador, y le dio la clasificación a la Copa Mundial de la FIFA Rusia 2018 a la Selección Argentina).

(c) En la semana 16 la búsqueda "Lionel Messi" fue más popular en YouTube (esta fecha corresponde a cuando el Barcelona F.C. gana el clásico ante el Real Madrid C. F. en el Estadio Santiago Bernabéu, con dos goles de Messi. El segundo gol ocurrió en la última jugada del partido, llegando así a los 500 goles con la camiseta del Barcelona F. C.).

(d) El nivel de popularidad en ambos sitios estuvo cerca de 45.

(e) En la semana 20, "Lionel Messi" obtuvo 120000 búsquedas en Google y 320000 en YouTube.

Comparemos ahora la popularidad de Messi en Google durante el mismo período de tiempo, en Argentina y en España. Según Google Trends, la tendencia fue la que se ilustra a continuación.



Observando el gráfico podemos determinar cuán populares fueron en Google ciertos momentos de la vida del jugador argentino, en relación a otros hechos ocurridos en sendos países en el mismo momento. Por ejemplo, el clásico Real Madrid vs. Barcelona (semana 16) fue completamente popular en España, mientras que en Argentina solamente llegó a la mitad de ese nivel (aunque vimos antes que fue lo más popular en YouTube en Argentina). También podemos decir que el casamiento y la clasificación a la Copa de Mundo tuvieron la mitad de popularidad relativa en España respecto a la que tuvieron en Argentina. «

Ejercicios 5.1

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -2x^3 + x + 5$. Hallar la imagen a través de f de $x = 2$, $x = 0$ y $x = -1$.

2. Sea $g(x) = \sqrt{3x - 6}$. Hallar el dominio de g. Luego, escoger un valor c en dicho dominio y calcular $g(c)$.

3. Determinar el dominio de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-16x+64}$

(b) $g(x) = \dfrac{\sqrt{-2x+8}}{x^3+x^2}$

(c) $h(x) = \dfrac{1}{\log(x^2+10x+25)}$

(d) $r(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+6x+5}}{\log(x+1)}$

4. Ubicar los siguientes puntos en un mismo sistema de ejes coordenados:

(a) $P_1 = (-2, 4)$

(b) $P_2 = (0, -1)$

(c) $P_3 = (-3, -3)$

(d) $P_4 = (1, 2)$

(e) $P_5 = (2, -3)$

(f) $P_6 = (3, 0)$

5. Sea a un número real positivo. Determinar a qué cuadrante pertenecen los siguientes puntos:

(a) $P = (-a, 2a)$

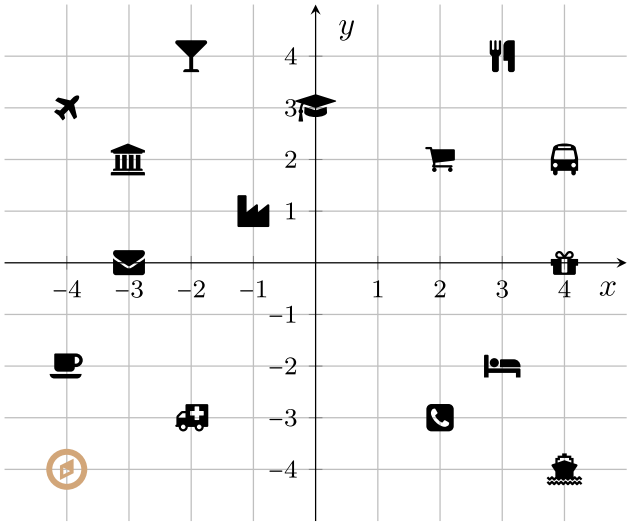
(b) $Q = (a, 4)$

(c) $R = (1, -a)$

(d) $S = (-\sqrt{a}, -2)$

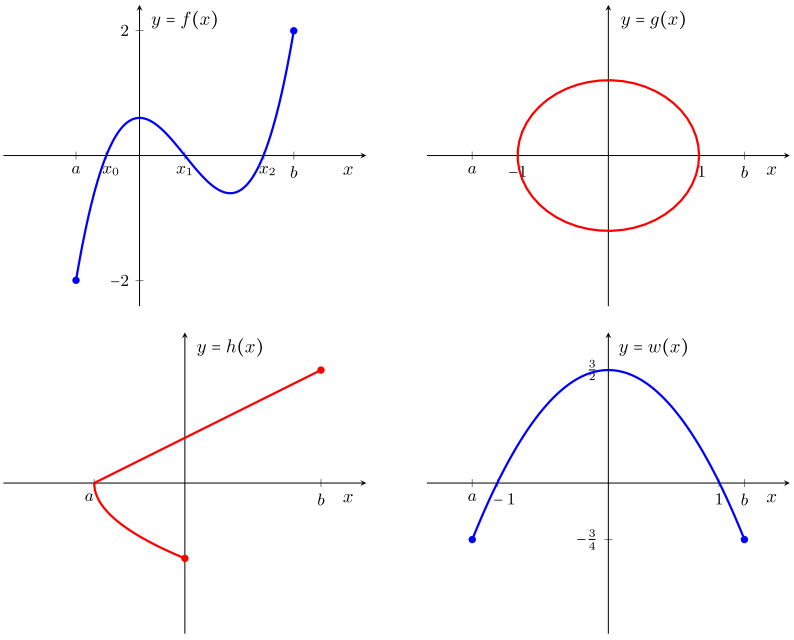
6. Observando los dibujos en el siguiente plano, indicar las coordenadas de cada sitio, suponiendo que estas son siempre números enteros:

Universidad = Hospital = Fábrica =
Shopping = Cafetería = Banco =
Bar de tragos = Autobús = Puerto =
Supermercado = Telefónica = Hotel =
Comedor = Aeropuerto = Correo =



7. Sea $f(x) = -x^2 + 3$. Representar en un mismo gráfico los puntos $(x, f(x))$, para $x = 1$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 2$, $x = -2$, $x = \sqrt{2}$ y $x = \sqrt{3}$. Unir dichos puntos con línea punteada para ver el aspecto de la gráfica de f.

8. Determinar si los gráficos en la figura siguiente corresponden o no a funciones con dominio $[a, b]$. En caso de no serlo, indicar qué condiciones no se cumplen. En caso de serlo, determinar su imagen y sus raíces, si las tiene.



9. Hallar analíticamente las raíces de las siguientes funciones (recordar que deben pertenecer al dominio).

(a) $f(x) = x^2 + x - 30$

(b) $g(x) = \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

(c) $q(x) = \sqrt[3]{x^2 - 25}$

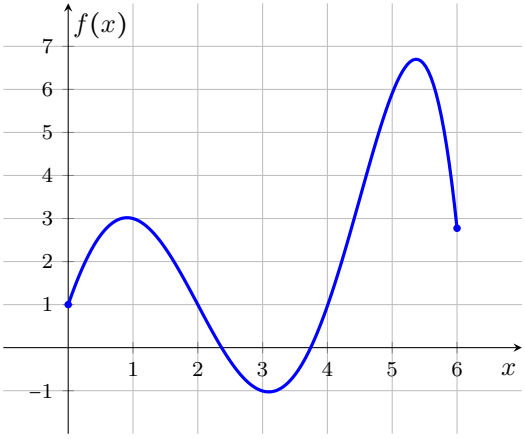
(d) $p(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$

(e) $h(x) = \frac{\log(x^2-3)}{x+2}$

(f) $w(x) = \frac{(x-1)\sqrt{3x^2-27}}{x+3}$

10. Representar en GeoGebra las funciones del ejercicio anterior, y hallar la intersección de cada una con el eje x para comparar con lo obtenido.

11. La representación gráfica de una función $f : [0, 6] \to \mathbb{R}$ es la siguiente:



A partir de ella, resolver las siguientes consignas:

(a) ¿Cuál es la imagen de $x = 1$ a través de f?

(b) Determinar $f(5)$.

(c) Hallar un valor de x tal que $f(x) < 0$.

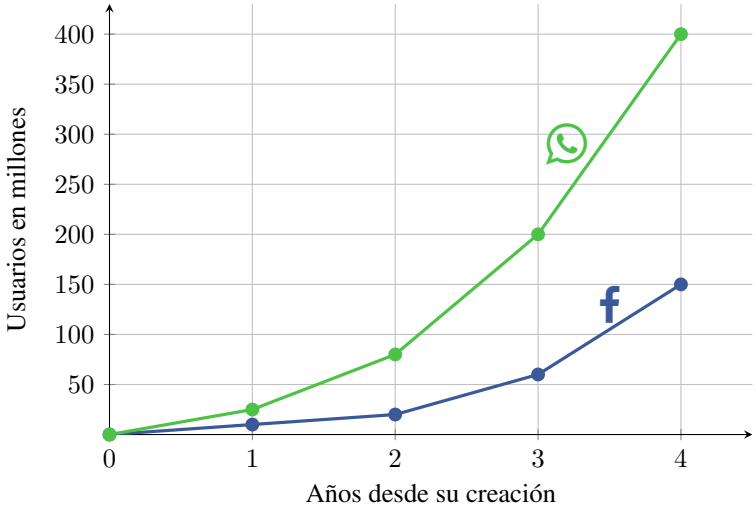
(d) ¿Para qué valores de x se tiene $f(x) = 1$?

(e) ¿Cuántas raíces tiene f?

(f) ¿Cuántos valores de x satisfacen $f(x) = 5$?

(g) Determinar si $y = 7$ pertenece a la imagen de f.

12. El siguiente gráfico muestra el crecimiento en la cantidad de usuarios de Facebook y WhatsApp durante los primeros años desde su creación*.



Teniendo en cuenta que el lanzamiento de WhatsApp fue en 2009, y el de Facebook en 2004, responder las siguientes preguntas de acuerdo a lo que indica el gráfico:

(a) Indicar a qué años corresponde la información dada en el gráfico para cada una de las compañías.

(b) Determinar la cantidad aproximada de usuarios de WhatsApp en 2012 y 2013.

(c) Determinar la cantidad aproximada de usuarios de Facebook en 2007 y 2008.

(d) ¿En qué año WhatsApp alcanzó los 200 millones de usuarios?

(e) Determinar, para cada compañía, el incremento aproximado de usuarios producido desde el segundo hasta el tercer año, a partir de su creación.

13. El gráfico en la Figura 5.3 ilustra la cantidad de usuarios activos en diferentes redes sociales y servicios de mensajería, desde 2013 hasta 2017. A partir de esta información, responder lo siguiente:

(a) Indicar la cantidad aproximada de usuarios activos en cada red social o aplicación al finalizar el año 2017.

(b) Determinar la cantidad aproximada de usuarios que poseía WhatsApp al momento de ser comprada por Facebook, en febrero de 2014. ¿Cuánto tiempo pasa hasta que esta cantidad se duplica?

*Todos los datos son ilustrativos, y pueden no ser completamente exactos.

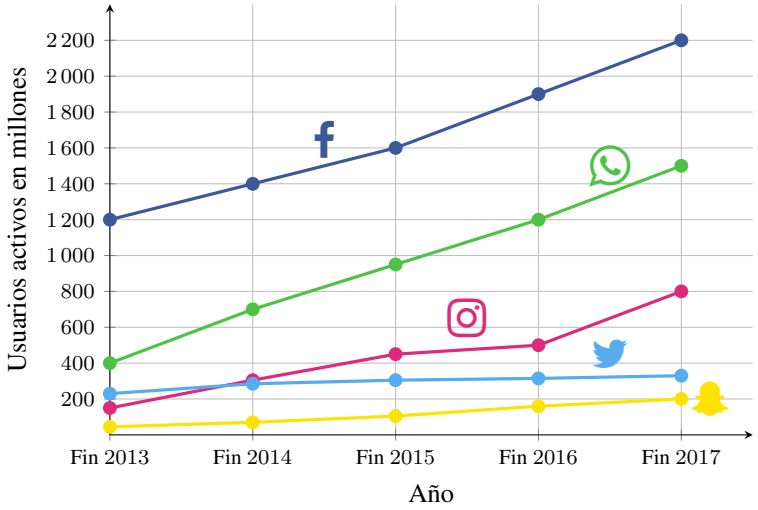


Figura 5.3: Usuarios activos.

(c) ¿Cuándo alcanza Facebook los 1400 millones de usuarios? En ese momento, ¿qué aplicación o red social tiene casi la mitad de usuarios que Facebook? ¿Cuáles tienen casi la cuarta parte?

(d) Indicar el momento aproximado en que la cantidad de usuarios de Instagram comienza a superar a la de Twitter, y cuál es esa cantidad.

(e) ¿Qué redes o aplicaciones no alcanzaron los 800 millones de usuarios en el período informado? ¿Cuáles superaron los 1000 millones?

(f) Hay dos redes o aplicaciones que sextuplican en algún momento la cantidad de usuarios que tiene Snapchat al finalizar 2017. Indicar cuáles son y cuándo alcanzan dicha cantidad.

14. Se cuenta con la siguiente información sobre Instagram:

Se crea Instagram en octubre de 2010.

En 2011 añade hashtags, filtros y efectos, para aumentar los “Me gusta”.

El 3 de abril de 2012 se lanza la versión para Android.

El 9 de abril de 2012 es adquirido por Facebook.

A partir de agosto de 2012 permite etiquetar lugares.

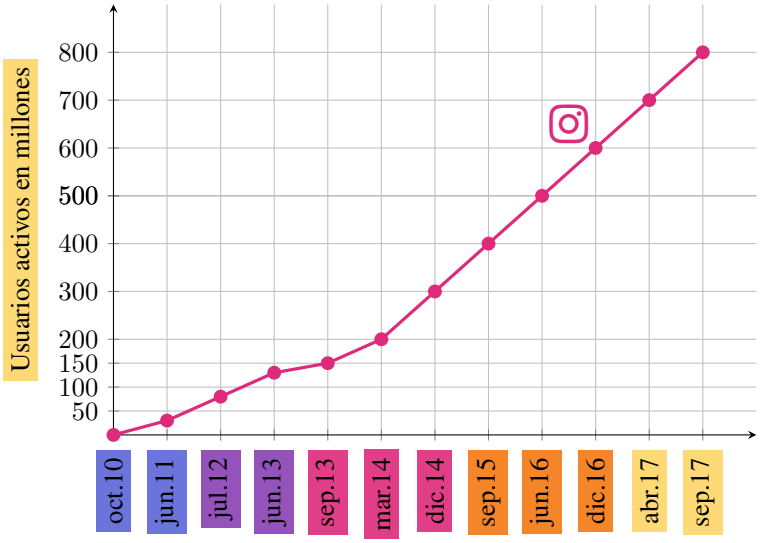
Desde mayo de 2013 permite etiquetar a personas.

En junio de 2013 incorpora videos.

En diciembre de 2013 añade Instagram Direct, para mensajes privados.

En agosto de 2016 llegan las Instagram Stories (historias).

Además, el gráfico siguiente contiene información sobre la cantidad de usuarios activos en Instagram desde su creación hasta el año 2017.



Teniendo en cuenta el gráfico y la información dada, resolver las siguientes consignas:

(a) Cuando es comprado por Facebook, ¿cuántos usuarios activos tenía aproximadamente Instagram?

(b) Indicar la cantidad aproximada de usuarios activos que tenía Instagram al momento de incorporar los videos.

(c) ¿Cuántos usuarios activos había en septiembre de 2013?

(d) Determinar la cantidad de usuarios que había a los 3 meses de haberse incorporado los mensajes privados.

(e) ¿Cuántos usuarios activos había al finalizar el año en el que Instagram introduce las historias?

(f) Indicar el momento en el que se llegó al medio millón de usuarios.

(g) En los dos últimos años contemplados en el gráfico, ¿qué cantidad de usuarios activos se agregó?

15. Mediante el uso de una tabla de signos como en el Ejemplo 150, esbozar la gráfica de las siguientes funciones polinómicas.

(a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 3x + 4$

(b) $g(x) = x^3 - 7x + 6$

(c) $h(x) = x^3 + 2x^2 - 33x - 90$

16. Graficar en GeoGebra las funciones del ejercicio anterior para comprobar los resultados obtenidos.

5.2. Función afín

En esta sección nos ocuparemos de estudiar el comportamiento de la denominada **función afín**[*], que es una de la forma

$$f(x) = ax + b,$$

siendo a y b números reales. Si $a \neq 0$ entonces es una función polinómica de grado 1, y si además se tiene $b = 0$, la función $f(x) = ax$ es conocida como **lineal**. Cuando $a = 0$, la función $f(x) = b$ es llamada también **función constante**.

Vimos en la sección anterior que el dominio de cualquier función polinómica es el conjunto de todos los números reales. En particular, lo mismo vale para las funciones afines. Luego, si no se indica lo contrario, la convención sobre dominios indica que $\mathbb{R}$ es el dominio de las mismas.

Ejemplo 153. Las siguientes son funciones afines:

$$y = 2x - 5, \qquad y = -x + 2, \qquad y = \tfrac{1}{2}x, \qquad y = -\pi x + 1, \qquad y = 3 + x. \quad \ll$$

Ejemplo 154. **Esbozando el gráfico de funciones afines.** Analizaremos las gráficas de las funciones dadas por

$$y = 2x - 1, \qquad y = 2, \qquad y = -x + 1.$$

Haremos tablas de valores para detectar la "forma" de las mismas.

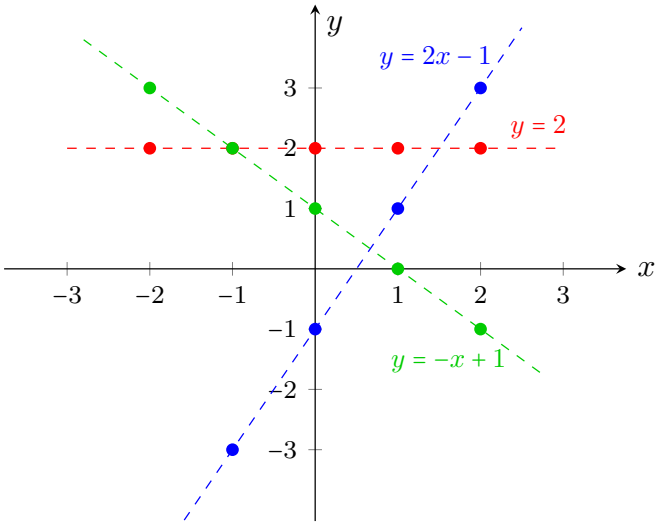
x	$y = 2x - 1$
-2	$2 \cdot (-2) - 1 = -5$
-1	$2 \cdot (-1) - 1 = -3$
0	$2 \cdot 0 - 1 = -1$
1	$2 \cdot 1 - 1 = 1$
2	$2 \cdot 2 - 1 = 3$

x	$y = 2$
-2	2
-1	2
0	2
1	2
2	2

x	$y = -x + 1$
-2	$-(-2) + 1 = 3$
-1	$-(-1) + 1 = 2$
0	$-0 + 1 = 1$
1	$-1 + 1 = 0$
2	$-2 + 1 = -1$

En la figura siguiente representamos algunos de los puntos obtenidos (con el color indicado en cada tabla), y los unimos mediante una línea para ver el aspecto de la gráfica de cada función.

[*]Esta clase de funciones es conocida también como **función lineal**. Sin embargo, en matemática "ser lineal" significa satisfacer una propiedad, que no enunciaremos aquí, pero que las únicas funciones afines que la cumplen son aquellas con $b = 0$, es decir, las de la forma $f(x) = ax$.



Como vemos en el ejemplo anterior, la gráfica de una función afín es siempre una **recta**. Puesto que una recta queda completamente determinada al trazar dos puntos que pertenezcan a ella, dada una función afín será suficiente con conocer la imagen de dos valores para obtener su gráfica. Por simplicidad se suele tomar $x = 0$ como uno de esos valores, lo que produce el punto de coordenadas

$$P = (0, b),$$

y corresponde al punto sobre el eje y por el que pasa la recta. Otro punto que podemos marcar, si $a \neq 0$, es la intersección de la recta con el eje x, es decir, la raíz de la función. Notar que

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

En otras palabras, la gráfica interseca al eje horizontal cuando $x = -\frac{b}{a}$, que es la única raíz de f. Entonces, otro punto que pertenece a la recta es el de coordenadas

$$Q = \left(-\frac{b}{a}, 0\right).$$

Como mencionamos al comienzo, si $a = 0$ entonces la función tiene la forma $y = b$. Vimos en el ejemplo anterior que en tal caso el gráfico es una recta horizontal trazada a la altura b del eje y. Entonces, esta recta no interseca al eje x (es decir, la función no tiene raíces), salvo la gráfica de la función $y = 0$ que coincide con el eje horizontal.

Notar que si la función afín es lineal, es decir, de la forma $y = ax$, entonces $b = 0$ y los dos puntos definidos arriba son $P = (0,0) = Q$. Entonces será necesario ubicar otro punto perteneciente a la recta además del origen, como por ejemplo $(1,a)$ o cualquiera de la forma $(x, f(x))$.

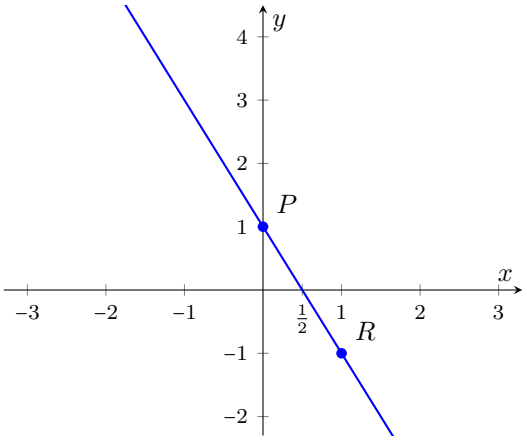
Resumiendo, para representar gráficamente una función afín, ubicamos los puntos P y Q, o cualesquiera otros dos de la forma $(x, f(x))$, en un sistema de ejes cartesianos, y luego trazamos la recta que pasa por ellos.

Ejemplo 155. **Graficando una función afín.** Representar gráficamente la recta de ecuación $y = -2x + 1$.

Solución: Graficaremos los puntos

$$P = (0, f(0)) = (0,1) \quad \text{y} \quad R = (1, f(1)) = (1,-1),$$

y luego la recta que pasa por ellos. Esta recta debe cortar al eje x en el punto $Q = \left(-\frac{b}{a}, 0\right) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$.



«

En lo anterior hemos utilizado varias veces la expresión "un punto que pertenezca a la recta" correspondiente al gráfico de $f(x) = ax + b$. Esto significa que las coordenadas del punto son de la forma $(x, f(x))$. En otras palabras, la coordenada y del punto no es cualquier valor, sino que dado un valor para x, esta debe satisfacer $y = ax + b$. Así, dada la ecuación de la recta, hallamos puntos sobre ella dando diferentes valores a x, y calculando el correspondiente valor de y. Esto también nos permite hacer el proceso inverso, es decir, dado un punto, podemos determinar si está o no sobre la recta, simplemente verificando si sus coordenadas **satisfacen la ecuación** que define la recta. Esto se verá más claro en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 156. **Determinando si un punto pertenece o no a la recta.** Determinar si los puntos $P = (2, 4)$ y $Q = (1, 5)$ pertenecen o no al gráfico de $y = 3x - 2$.

Solución: Para determinar si un punto pertenece a la recta, debemos ver si sus coordenadas x e y satisfacen la relación $y = 3x - 2$. Para el punto P tenemos $x = 2$ e $y = 4$. Puesto que

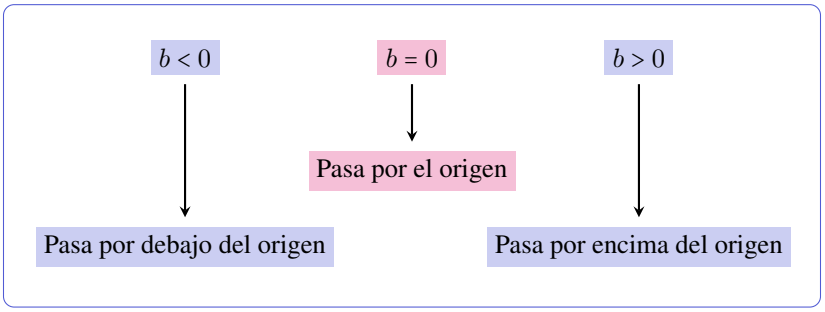
$$3 \cdot 2 - 2 = 6 - 2 = 4, \quad ✔$$

se sigue que P es un punto sobre la recta dada. En el caso de Q tenemos $x = 1$ e $y = 5$, pero

$$3 \cdot 1 - 2 = 1 \neq 5, \quad ✗$$

por lo que Q no pertenece a la recta dada. «

☞ Ubicar puntos de una recta no es la única forma de conocer el aspecto de la misma. También podemos esbozar su gráfica según los valores que tomen a y b. Como vimos antes, el valor de b corresponde a la "altura" a la que la recta atraviesa al eje y. Luego,



Para ilustrar lo anterior graficaremos, en un mismo sistema de ejes, rectas de la forma $y = x + b$, para diferentes valores de b.

Ejemplo 157. **El efecto de b.** Graficar las funciones afines

$$y = x, \quad y = x + 2, \quad y = x - 3.$$

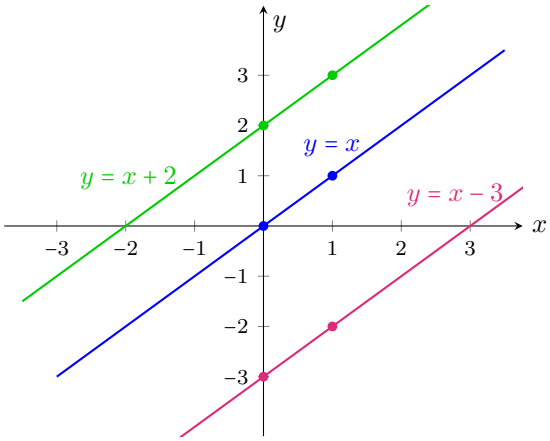
Solución: Para graficar cada recta, aplicaremos el método de ubicar dos puntos pertenecientes a ella, y luego trazaremos la recta que los une. Sabemos que cada una pasa por el punto $(0, b)$, para el valor de b correspondiente en cada caso:

$$b = 0, \quad b = 2 \quad \text{y} \quad b = -3.$$

Necesitamos ubicar otro punto perteneciente a cada una de ellas. Por simplicidad, ubicaremos el punto correspondiente a $x = 1$ para cada una, es decir, el punto $(1, 1 + b)$:

$$\begin{aligned} y = x \quad &\text{pasa por el punto} \quad (1,1) \\ y = x + 2 \quad &\text{pasa por el punto} \quad (1,3) \\ y = x - 3 \quad &\text{pasa por el punto} \quad (1,-2) \end{aligned}$$

En el gráfico siguiente dibujamos las rectas que pasan por los puntos $(0, b)$ y $(1, 1 + b)$, para el valor de b correspondiente en cada caso.



«

Si observamos la recta correspondiente a $y = x$, graficada en color azul en el ejemplo anterior, vemos que a cada número del eje de abscisas le corresponde el mismo número en el eje de ordenadas, es decir, que las dos coordenadas de cada punto son idénticas (la recta pasa por el punto $(1, 1)$, el $(5, 5)$, el $(-3, -3)$, y así). Esto conduce a llamarla de la siguiente forma:

La función $y = x$ se conoce como **función identidad**.

Ahora, para analizar el efecto que produce el número a, graficaremos en un mismo sistema de ejes a rectas de la forma $y = ax$, para diferentes valores de a.

Ejemplo 158. **El efecto de a.** Graficar las funciones lineales

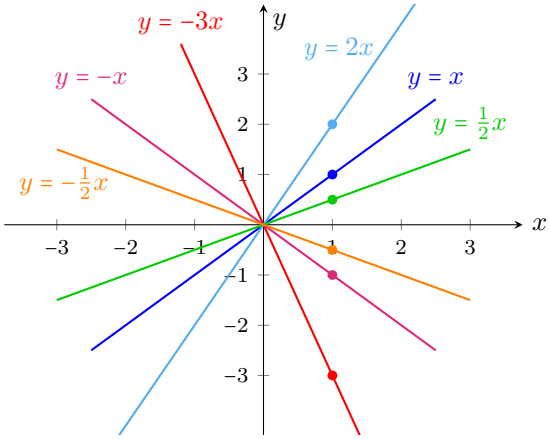
$$y = -\tfrac{1}{2}x, \quad y = -3x, \quad y = -x, \quad y = x, \quad y = 2x, \quad y = \tfrac{1}{2}x.$$

Solución: Aplicaremos como antes el método de ubicar dos puntos pertenecientes a cada una, y luego trazaremos la recta que los une. Ya que para cada una se tiene $b = 0$, estas rectas pasan todas por el punto $(0, 0)$. Necesitaremos ubicar

un punto más, perteneciente a cada una de ellas. Por simplicidad, ubicaremos como antes el punto correspondiente a $x = 1$, es decir, el punto $(1, a)$, con a el respectivo en cada caso:

$y = -\frac{1}{2}x$ pasa por el punto $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$
$y = -3x$ pasa por el punto $(1, -3)$
$y = -x$ pasa por el punto $(1, -1)$
$y = x$ pasa por el punto $(1, 1)$
$y = 2x$ pasa por el punto $(1, 2)$
$y = \frac{1}{2}x$ pasa por el punto $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

En el siguiente gráfico dibujamos las rectas que pasan por cada uno de los puntos anteriores y por el origen.



Del ejemplo podemos establecer el efecto que produce el parámetro a en la recta resultante: el signo nos dice si, al mirarla de izquierda a derecha, "sube" (cuando a es positivo) o "baja" (cuando a es negativo). Además, mientras mayor sea su valor absoluto, más empinada será la recta, ya sea en subida o en bajada. Resumimos esto en la Figura 5.4.

Dada una función $f(x) = ax + b$, el número a (es decir, el coeficiente lineal en la expresión polinómica) es llamado **pendiente** de la recta, ya que, como vimos, determina por completo la inclinación de la misma con respecto a los ejes coordenados. El número b (término independiente) es llamado **ordenada al origen**, ya que indica el valor de la ordenada cuando la abscisa toma el valor cero.

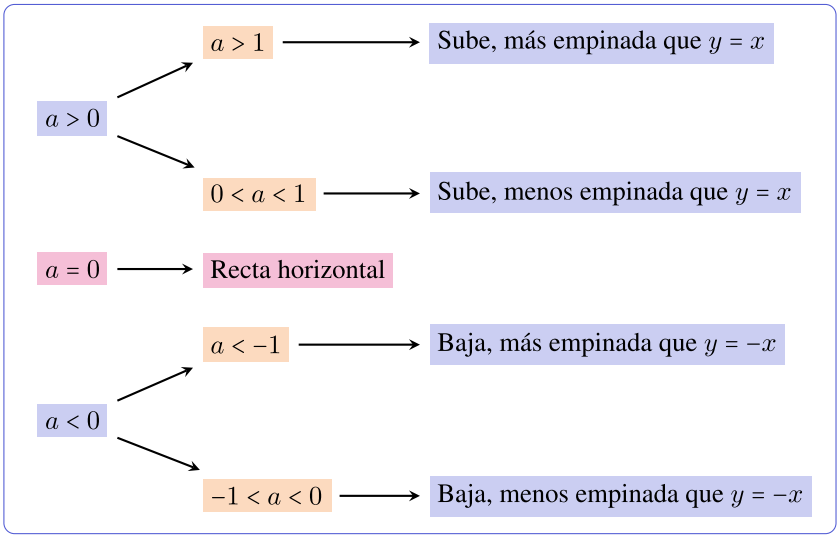


Figura 5.4: El efecto de a.

Para visualizar dinámicamente el efecto de a y b, se propone la siguiente actividad en GeoGebra:

- Con la herramienta 

crear un **deslizador** para el número a, el cual permite variar el valor de a en un rango establecido (dejaremos el que viene dado por defecto, que es $-5 \leq a \leq 5$). Hacer lo mismo para b.
- Ingresar en el campo de entradas `y=ax+b`.
- Variar los valores de a y de b mediante los deslizadores, para observar el efecto producido en la recta.

Dos rectas son **paralelas** si tienen la misma inclinación. Puesto que, para rectas no verticales, la inclinación está dada por la pendiente, tenemos que:

> Dos rectas no verticales son paralelas si y solo si tienen la misma pendiente.

Ejemplo 159. **Rectas paralelas.** Hallar una recta paralela a la gráfica de la función $f(x) = 3x + 5$, cuya ordenada al origen sea -4.

Solución: Una recta (no vertical) queda determinada conociendo su pendiente a y su ordenada al origen b. Estos dos datos fueron dados en la consigna, ya que

pedir que sea paralela a la mencionada, implica que deben tener la misma pendiente $a = 3$. Además se pide que $b = -4$, por lo que la ecuación de la recta buscada es

$$y = 3x - 4.$$ «

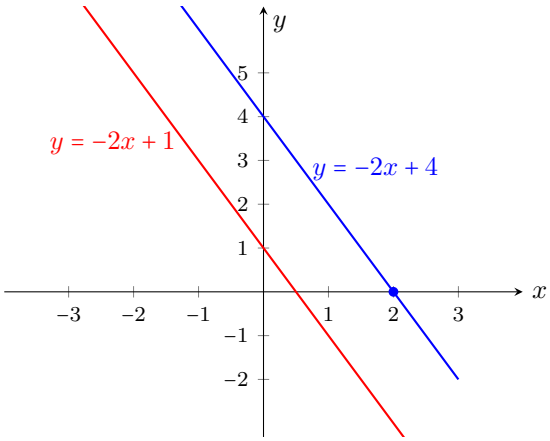
El ejemplo anterior puede resolverse en GeoGebra ingresando el punto P=(0,-4) y la ecuación de la recta dada, a la cual, supongamos, que el software le asigna el nombre f. Luego, el comando Recta(P,f) trazará la recta que pase por P y que sea *paralela* a la recta f. Esta herramienta posee el ícono  en la barra gráfica.

Ejemplo 160. **Rectas paralelas.** Hallar la ecuación de la recta paralela a la gráfica de $f(x) = -2x + 1$, cuya raíz sea $x = 2$.

Solución: Ya sabemos que la pendiente de la recta buscada es -2, es decir, la ecuación es $y = -2x + b$. Determinaremos b de manera que la raíz de la función sea $x = 2$, es decir, que debe cumplirse que el punto $(2, 0)$ pertenezca a la recta. Esto ocurre si

$$0 = -2 \cdot 2 + b$$

lo que implica $b = 4$. Entonces, la ecuación de la recta buscada es $y = -2x + 4$. Graficamos esta recta junto con la dada en la figura siguiente.



Recordemos que la raíz de una función afín con pendiente distinta de cero está dada por $x = -\frac{b}{a}$. Luego, conociendo los valores de a y de la raíz, otra forma de calcular b es a partir de esta relación. En este caso, sabemos que $a = -2$ y queremos que la raíz sea $x = 2$. Luego, b debe satisfacer:

$$2 = -\frac{b}{-2} = \frac{b}{2},$$

de lo que se deduce, al igual que antes, que $b = 4$. Aunque cualquiera de las dos formas de hallar b es correcta, la primera evita tener que memorizar fórmulas, recurriendo solamente al significado de pertenencia de un punto a la gráfica de una función. «

Dos rectas son **perpendiculares** si forman entre ellas un ángulo recto. Para el caso de dos rectas con *pendientes no nulas*, puede probarse que:

> Dos rectas son perpendiculares si y solo si el producto de sus pendientes es igual a -1.

☞ Notar que el producto de dos números es igual a -1 si y solo si uno es el inverso multiplicativo del otro, y con signo opuesto. Es decir, dos rectas son perpendiculares si y solo si sus pendientes son de la forma

$$a \quad \text{y} \quad -\frac{1}{a},$$

siendo a cualquier real distinto de cero.

Ejemplo 161. **Rectas perpendiculares.** Los siguientes son pares de rectas perpendiculares entre sí:

$$\begin{aligned} &y = -2x + 1, && y = \tfrac{1}{2}x + 5; \\ &y = \tfrac{5}{3}x - 2, && y = -\tfrac{3}{5}x + 1; \\ &y = \pi x + 7, && y = -\tfrac{1}{\pi}x + 16. \end{aligned}$$

Esto se debe a que en cada par, el producto de las pendientes es igual a -1:

$$-2 \cdot \tfrac{1}{2} = -1, \qquad \tfrac{5}{3} \cdot \left(-\tfrac{3}{5}\right) = -1, \qquad \pi \cdot \left(-\tfrac{1}{\pi}\right) = -1. \quad «$$

Ejemplo 162. **Rectas perpendiculares.** Hallar la ecuación de la recta perpendicular a $y = 3x - 2$, que pasa por el punto $P = (3, 1)$.

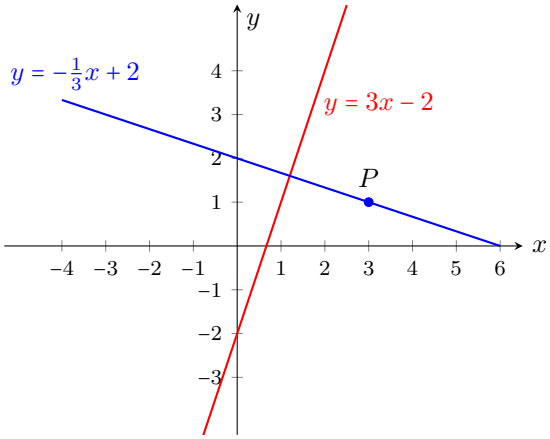
Solución: Al pedir que sea perpendicular a una recta con pendiente 3, nos está diciendo que la recta buscada debe tener pendiente $a = -\frac{1}{3}$. Es decir, será

$$y = -\tfrac{1}{3}x + b,$$

y determinaremos b de manera que $(3, 1)$ pertenezca a la recta. Para ello, debe valer la igualdad

$$1 = -\tfrac{1}{3} \cdot 3 + b,$$

de donde se obtiene $b = 2$. Entonces, la recta buscada es $y = -\frac{1}{3}x + 2$, cuya representación gráfica se encuentra en la figura siguiente:




El ejercicio anterior puede resolverse en GeoGebra ingresando primero el punto P=(3,1) y la ecuación de la recta dada. Luego, seleccionando la herramienta cuyo ícono gráfico es , se elige el punto P y después la recta dada. Se obtiene así la recta perpendicular a ella por el punto seleccionado. El comando correspondiente para esto es Perpendicular(<Punto>,<Recta>).


Vimos que dos rectas con pendientes no nulas son perpendiculares si y solo si el producto de sus pendientes es -1. Pero toda recta horizontal es de la forma $y = b$, por lo que su pendiente es cero, y no podemos obtener su recíproco. Entonces, ¿cuál es la ecuación de la recta perpendicular a una horizontal? Así como las rectas horizontales tiene ecuación $y = b$ (lo que significa que y posee siempre el mismo valor constante aunque x varíe), las **rectas verticales** tienen ecuación

$$x = c,$$

lo que significa que el valor de x no cambia, aunque los valores de y varíen. Toda recta horizontal es perpendicular a cualquier recta vertical (ver Figura 5.5).


Las rectas verticales no corresponden al gráfico de una función, pues no hay unicidad de imagen.


Sabemos que una recta no vertical queda completamente determinada conociendo su pendiente a y su ordenada al origen b. Pero conocer su ordenada al origen es equivalente a saber que el punto $(0, b)$ pertenece a la recta. ¿Será posible hallar una fórmula general para determinar la ecuación de una recta conociendo su pendiente y otro punto que pertenece a ella? Supongamos que sabemos que la recta tiene pendiente $a \neq 0$ y que el punto $P = (x_1, y_1)$ pertenece a

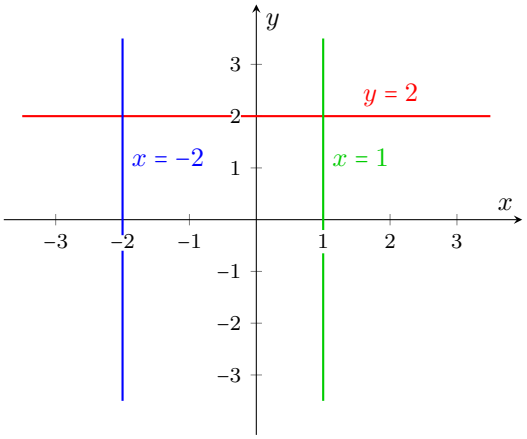


Figura 5.5: $y = b$ es perpendicular a $x = c$.

ella. La ecuación de la recta es $y = ax + b$, y solamente falta determinar b. Pero P pertenece a la recta, por lo que sus coordenadas satisfacen su ecuación, es decir,

$$y_1 = ax_1 + b,$$

de lo que se obtiene inmediatamente $b = y_1 - ax_1$. Entonces la ecuación de la recta con pendiente a que pasa por $P = (x_1, y_1)$ es

$$y = ax + \underbrace{y_1 - ax_1}_{b} = a(x - x_1) + y_1,$$

lo que se conoce como **ecuación punto-pendiente** de una recta.

Ejemplo 163. **Usando la ecuación punto-pendiente.** Hallar la ecuación de la recta con pendiente $a = 4$ y que pasa por el punto $(-2, 5)$.

Solución: Utilizando la ecuación punto-pendiente de una recta, sabemos que la recta buscada está dada por

$$y = 4(x - (-2)) + 5 = 4x + 13.$$ «

☞ No es necesario memorizar la fórmula anterior, ya que podemos obtener b como lo hicimos antes en otros ejemplos. Sabiendo que la pendiente es 4 y que $(-2, 5)$ pertenece a la recta, entonces debe ocurrir que

$$5 = 4 \cdot (-2) + b,$$

y despejando se obtiene $b = 13$, como en el ejemplo anterior.

? Ya que dos puntos dados determinan una única recta que pasa por ellos, nos preguntamos ahora si es posible determinar la ecuación de dicha recta a partir de las coordenadas de los puntos. La respuesta es sí, y lo haremos primero mediante un ejemplo, para luego enunciar la fórmula general.

Ejemplo 164. **Recta por dos puntos dados.** Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P = (2, 3)$ y $Q = (-1, -3)$.

Solución: Sabemos que la ecuación de la recta tiene la forma $y = ax+b$. Debemos determinar a y b de manera que tanto P como Q satisfagan la ecuación de la recta. Es decir,

$$\begin{cases} a \cdot 2 + b &= 3, \\ a \cdot (-1) + b &= -3. \end{cases}$$

Este es un sistema con dos ecuaciones y dos incógnitas a y b, el cual se resuelve por sustitución o por igualación como se estudió en la Sección 4.4. Por ejemplo, despejando b en ambas ecuaciones tenemos

$$b = 3 - 2a \quad \text{y} \quad b = -3 + a.$$

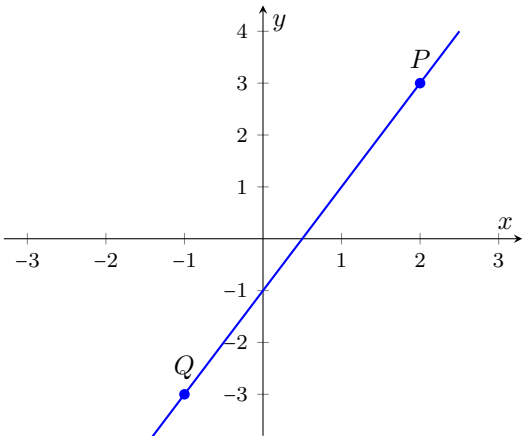
Igualando estas dos cantidades se obtiene

$$3 - 2a = -3 + a,$$

de lo que se concluye fácilmente $3a = 6$, o equivalentemente $a = 2$. Entonces $b = 3 - 2a = 3 - 4 = -1$. Por lo tanto la ecuación de la recta buscada es

$$y = 2x - 1,$$

cuya gráfica se encuentra a continuación:



El ejemplo anterior muestra de qué manera, dados dos puntos $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ con $x_1 \neq x_2$, podemos determinar la recta que pasa por ellos. Lo que hicimos fue hallar a y b de manera que ambos puntos satisfagan la ecuación de la recta $y = ax + b$, quedando planteado así el sistema

$$\begin{cases} a \cdot x_1 + b &= y_1, \\ a \cdot x_2 + b &= y_2. \end{cases}$$

Despejando b de ambas ecuaciones e igualando luego lo obtenido, llegamos a

$$y_1 - ax_1 = y_2 - ax_2.$$

Resolvamos esta ecuación para determinar la pendiente a de la recta buscada:

$$y_1 - ax_1 = y_2 - ax_2 \iff ax_2 - ax_1 = y_2 - y_1 \iff a(x_2 - x_1) = y_2 - y_1,$$

de lo que se obtiene

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Lo anterior nos da la pendiente de la recta que une dos puntos dados, siempre que $x_1 \neq x_2$ (si $x_1 = x_2$, entonces la recta que pasa por P y Q es vertical, de ecuación $x = x_1$). Luego, podemos hallar $b = y_1 - ax_1$, o bien podemos utilizar la fórmula punto-pendiente con el valor de a hallado y con cualquiera de los dos puntos dados.

Vamos a rehacer el ejemplo anterior, utilizando la fórmula hallada.

Ejemplo 165. **Recta que pasa por dos puntos.** Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P = (2, 3)$ y $Q = (-1, -3)$.

Solución: Sabemos que la pendiente de la recta que une P y Q está dada por

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3 - 3}{-1 - 2} = \frac{-6}{-3} = 2.$$

Aplicando ahora la fórmula punto-pendiente con $a = 2$ y P, obtenemos:

$$y = 2(x - 2) + 3 = 2x - 1.$$ «

En GeoGebra es posible hallar la recta que pasa por dos puntos P y Q mediante el comando Recta(P,Q), introduciendo previamente dichos puntos. Esta herramienta también se encuentra en el menú gráfico como . Notar que la ecuación $y = ax + b$ de una recta también puede expresarse como $y - ax = b$ o $y - ax - b = 0$. Recíprocamente, una expresión de la forma

$$Ay + Bx + C = 0 \qquad \text{o} \qquad Ay + Bx = D,$$

con $A \neq 0$, puede llevarse fácilmente (dividiendo por A y despejando y) a la forma usual $y = ax + b$, conocida también como **ecuación pendiente-ordenada al origen** de la recta. Las formas anteriores se conocen como **ecuación general** de la recta, y GeoGebra suele expresar así la ecuación de la recta hallada en la versión para computadoras. Sin embargo, es posible convertir de una forma a otra simplemente haciendo clic derecho sobre la recta, y eligiendo la forma que uno desee.

Aplicación: modelando problemas reales.

Veamos ahora algunas aplicaciones de las funciones afines a problemas concretos. A lo largo del libro, por simplicidad en la representación gráfica de los modelos, supondremos que todas las variables involucradas (tiempo, dinero, etc.) son **continuas** en lugar de discretas. Esto significa que pueden tomar cualquier valor en un intervalo determinado. Luego, si estuviéramos modelando la ganancia en función de la cantidad de unidades vendidas de un determinado artículo (el cual no puede fraccionarse), el dominio será el conjunto de los números naturales (no se puede vender un lápiz y medio, por ejemplo). En tal caso, el gráfico debería ser un conjunto de puntos, en lugar de una línea continua. Sin embargo, graficaremos aquí la función como si su dominio fuera el conjunto de los números reales o un intervalo, y luego el resultado deberá interpretarse según el contexto.

Ejemplo 166. El dueño de una agencia de viajes paga a cada empleado un sueldo base de \$6300 por mes, más \$500 por cada viaje vendido.

(a) Determinar el sueldo mensual de cada empleado, en función de los viajes vendidos.
(b) Determinar el sueldo de un empleado que vende 12 viajes en un mes.
(c) Determinar la cantidad de viajes que debe vender en un mes para que el sueldo sea de \$14800.

Solución:

(a) El sueldo mensual (en pesos) de cada empleado está dado por

$$S(x) = 500x + 6300,$$

donde x denota la cantidad de viajes vendidos en ese mes.

(b) Si vende 12 viajes en un mes, el sueldo es $S(12) = 500 \cdot 12 + 6300 = 12300$ pesos.

(c) Debemos hallar x natural tal que $S(x) = 14800$. Resolvamos esta ecuación:

$$14800 = 500x + 6300 \iff 8500 = 500x \iff 17 = x.$$

Entonces, un empleado debe vender 17 viajes en un mes para que el sueldo sea de \$14800.

Ejemplo 167. Una pileta se vacía con una bomba que extrae agua a razón de 400 litros por minuto. Al encender la bomba, en la pileta había 30000 litros de agua.

(a) Hallar la función que indica el caudal restante de agua en función del tiempo, y representarla gráficamente.

(b) Determinar la cantidad de agua que queda en la pileta luego de media hora de comenzar a vaciarla.

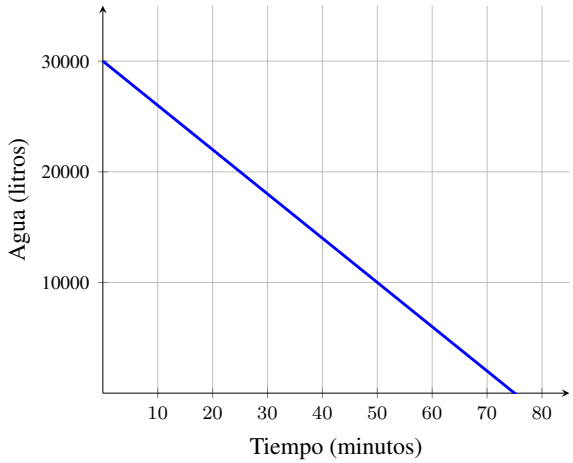
(c) Determinar el tiempo necesario para vaciar la pileta por completo.

Solución:

(a) El caudal de agua (en litros) en función del tiempo (en minutos) es

$$C(t) = 30000 - 400t,$$

cuya gráfica es la siguiente:



(b) Luego de media hora, la cantidad de agua en la pileta está dada por el valor $C(30) = 30000 - 400 \cdot 30 = 18000$ litros de agua.

(c) Debemos hallar t tal que $C(t) = 0$ (es decir, hallar la raíz de C). Resolvamos esta ecuación:

$$0 = 30000 - 400t \iff -30000 = -400t \iff t = 75.$$

Entonces, para vaciar por completo la pileta se necesitan 75 minutos. «

Ejemplo 168. **Grados Celsius vs. Grados Fahrenheit.** En Argentina se utiliza generalmente la escala de grados Celsius (°C) para medir la temperatura. Sin embargo, en otros países se utiliza la escala de grados Fahrenheit (°F). La relación de conversión entre ambas escalas está dada por la fórmula

$$f(x) = \frac{9}{5}x + 32,$$

siendo x la temperatura en grados Celsius, y $f(x)$ la misma temperatura expresada en grados Fahrenheit.

(a) Graficar la recta correspondiente a los grados Fahrenheit en función de los grados Celsius.

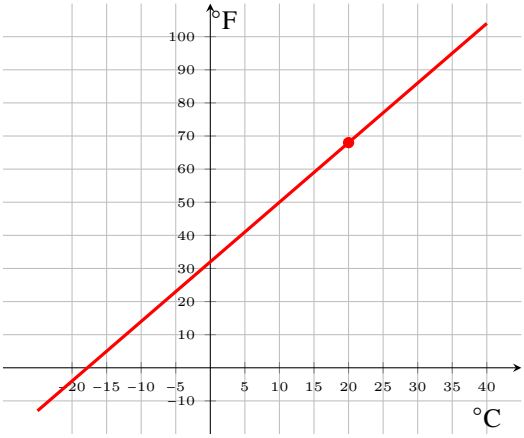
(b) ¿Cuántos grados Fahrenheit son 20 °C?

(c) ¿Cuántos grados Celsius son 50 °F?

(d) ¿Para qué valores de temperatura, expresada en grados Celsius, la temperatura equivalente en grados Fahrenheit es negativa?

Solución:

(a) La recta correspondiente es la siguiente:



(b) El equivalente a 20 °C en °F es $f(20) = 68$ (se marca el punto en la recta).

(c) Debemos hallar x tal que $f(x) = 50$. Resolvemos la ecuación:

$$50 = \frac{9}{5}x + 32 \iff 18 = \frac{9}{5}x \iff 18 \cdot \frac{5}{9} = x \iff 10 = x.$$

Es decir, 50 °F equivalen a 10 °C.

(d) Debemos hallar los valores de x tales que $f(x) < 0$. Entonces resolvemos la inecuación:

$$\frac{9}{5}x + 32 < 0 \iff \frac{9}{5}x < -32 \iff x < -32 \cdot \frac{5}{9} \approx -17.78.$$

Es decir, para tener una temperatura "bajo cero" en la escala Fahrenheit, debemos tener una temperatura inferior a los $-17.78\ ^\circ\text{C}$ (observar en la gráfica que este valor es donde la recta interseca al eje x). «

Ejemplo 169. Movimiento rectilíneo uniforme. Se llama **movimiento rectilíneo uniforme** (MRU) al que desarrolla un objeto que describe una trayectoria recta respecto a un observador, con velocidad constante (esto significa aceleración nula). En un movimiento rectilíneo uniforme, la posición s del objeto en cada instante t se puede calcular por la fórmula

$$s(t) = vt + s_0,$$

siendo s_0 la posición inicial del objeto y v la velocidad. La gráfica de la posición en función del tiempo es una recta cuya pendiente es la velocidad, y su ordenada al origen es la posición inicial.

Supongamos que un auto parte desde un punto sobre una autopista recta, y conduce por ella a una velocidad constante de 83 km/h.

(a) Escribir la fórmula que exprese la posición (en km) del auto en función del tiempo (en horas, luego de la partida).

(b) Calcular a qué distancia del punto de partida se encontrará luego de dos horas de recorrido.

(c) ¿Cuánto recorrió luego de tres horas y media?

(d) Hallar el tiempo transcurrido entre su partida y el instante en el que lleva recorridos 498 km.

Solución:

(a) Tomamos como punto de referencia al lugar donde partió, es decir, colocamos allí el "kilómetro cero". Aplicando entonces la fórmula con $s_0 = 0$, la posición (en km) del auto en función del tiempo (en horas) está dada por

$$s(t) = 83t.$$

(b) La distancia que habrá recorrido luego de 2 horas es $s(2) = 166$ km.

(c) Luego de tres horas y media habrá recorrido $s(3.5) = 290.5$ km.

(d) Buscamos t tal que $s(t) = 498$. Debemos resolver la ecuación

$$498 = 83t,$$

lo que equivale a $t = 6$. Luego, pasaron 6 horas desde su partida hasta recorrer 498 km. «

Ejemplo 170. **Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.** Se llama **movimiento rectilíneo uniformemente acelerado** (MRUA) al que desarrolla un objeto cuando se mueve en línea recta y su aceleración es constante (esto quiere decir que su velocidad varía uniformemente). En un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, la velocidad v del móvil en cada instante t se puede calcular por la fórmula

$$v(t) = at + v_0,$$

siendo v_0 la velocidad inicial* del móvil, y a su aceleración. La gráfica de la velocidad en función del tiempo es una recta cuya pendiente es la aceleración, y su ordenada al origen es la velocidad inicial.

Supongamos que un tren de alta velocidad, que se encuentra en reposo, comienza su trayecto en línea recta con una aceleración constante de 0.5 m/s^2.

(a) Escribir la fórmula que exprese la velocidad alcanzada por el tren en función del tiempo, indicando las unidades utilizadas.

(b) Calcular la velocidad (en kilómetros por hora) que alcanza el tren a los 3 minutos y medio.

(c) ¿Cuántos minutos le lleva alcanzar una velocidad de 165 m/s?

Solución:

(a) Como el tren parte desde el reposo, la velocidad inicial es cero. Puesto que la aceleración está dada en m/s^2, la fórmula

$$v(t) = 0.5t$$

nos dará la velocidad del tren (en m/s) en función del tiempo (en segundos).

(b) Notar que 3 minutos y medio equivalen a 210 segundos, por lo que la velocidad en ese momento será $v(210) = 105$, pero en m/s. Para expresarla en km/h, escribimos

$$105\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 105\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \underbrace{\frac{1\text{ km}}{1000\text{ m}}}_{=1} \cdot \underbrace{\frac{3600\text{ s}}{1\text{ h}}}_{=1} = 378\,\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

(c) Debemos hallar t tal que $v(t) = 165$. Resolvamos la ecuación:

$$165 = 0.5t \iff t = 330.$$

Esto nos dice que le lleva 330 segundos alcanzar la velocidad indicada, lo que equivale a 5 minutos y medio.

*Por estar en un movimiento rectilíneo, la dirección de la velocidad está dada por su signo.

Ejemplo 171. **Hallando la aceleración en un MRUA.** Un automóvil que va a una velocidad de 8 m/s acelera uniformemente su marcha, de forma que a los 30 segundos su velocidad es de 23 m/s.

(a) Calcular la aceleración aplicada en ese tiempo.

(b) Calcular la velocidad (en metros por segundo) que alcanza el automóvil luego de 6 segundos de comenzar a acelerar.

(c) Determinar el tiempo transcurrido desde que acelera hasta que alcanza una velocidad de 20 m/s.

Solución:

(a) Por un lado sabemos que la aceleración es la pendiente de la recta dada por la velocidad. Por otro lado, sabemos cómo calcular la pendiente de una recta conociendo dos puntos sobre ella. Si empezamos a contar el tiempo desde el momento que empieza a acelerar, entonces dos puntos en la recta correspondiente al gráfico de la velocidad son

$$(0, 8) \quad \text{y} \quad (30, 23).$$

Entonces la aceleración es $a = \frac{23-8}{30-0} = \frac{15}{30} = 0.5$ m/s^2.

(b) La velocidad (m/s) en cada instante t (en segundos) del período indicado está dada por

$$v(t) = 0.5t + 8,$$

por lo que la velocidad a los 6 segundos de comenzar a acelerar es igual a $v(6) = 11$ m/s.

(c) Buscamos t tal que $v(t) = 20$. Entonces resolvemos la ecuación

$$20 = 0.5t + 8 \iff 12 = 0.5t \iff 24 = t.$$

Esto significa que a los 24 segundos de comenzar a acelerar, llegó a una velocidad de 20 m/s (lo que equivale a 72 km/h). «

Ejemplo 172. **Caída libre - Tiro vertical.** Se denomina **caída libre** al movimiento vertical* de un cuerpo sometido únicamente a la aceleración de la gravedad, la cual es constantemente 9.8 m/s^2 (este valor se denota con la letra g), que lo atrae hacia el suelo (supondremos que no hay resistencia del aire). Este tipo de movimiento se produce cuando se lanza un objeto *verticalmente* hacia arriba o hacia abajo, o cuando simplemente lo dejamos caer. La caída libre (o tiro vertical) es un caso particular del movimiento uniformemente acelerado, por

NO CORRESPONDE

*Un cuerpo describe un movimiento vertical si su trayectoria forma con la horizontal un ángulo recto. Luego estudiaremos lo que se conoce como "tiro de proyectil", en el que el objeto se lanza con un ángulo de tiro agudo, produciendo un desplazamiento del mismo en dirección vertical y también horizontal.

(c) Buscamos t tal que $y(t) = 0$. Esto significa que debemos resolver la ecuación $-4.9t^2 + 20t = 0$. Extrayendo t como factor común, se obtiene

$$t(-4.9t + 20) = 0 \iff t = 0 \quad \text{o} \quad -4.9t + 20 = 0.$$

La opción $t = 0$ corresponde a cuando la pelota es lanzada, por lo que vuelve al piso cuando $-4.9t + 20 = 0$, lo que implica $t \approx 4.08$ segundos.

(d) Primero hallemos t tal que $v(t) = 0$. Resolviendo $-9.8t + 20 = 0$ se obtiene $t = 20/9.8 \approx 2.04$ segundos. Ahora calculamos

$$y(2.04) = -4.9 \cdot (2.04)^2 + 20 \cdot (2.04) = 20.4,$$

por lo que la altura máxima alcanzada por la pelota es de aproximadamente 20.4 metros.

(e) Sea v_0 la velocidad inicial. Entonces la velocidad y la altura están dadas por

$$v(t) = -9.8t + v_0, \qquad y(t) = -4.9t^2 + v_0 t.$$

Con el mismo razonamiento del inciso anterior, queremos que

$$\begin{cases} -9.8t + v_0 &= 0, \\ -4.9t + v_0 &= 25. \end{cases}$$

Este es un sistema con dos ecuaciones lineales y dos incógnitas t y v_0, el cual se resuelve por sustitución o por igualación como se estudió en la Sección 4.4. Resolviendo se obtiene $t \approx 5.10$ y $v_0 = 50$. Esto significa que si la velocidad inicial es de 50 m/s, la pelota alcanza una altura máxima de 25 metros a los 5 segundos de ser lanzada, aproximadamente. «

Las funciones lineales también modelan una infinidad de situaciones frecuentes. Este es el caso de problemas de proporción directa, lo que incluye, en particular, a problemas de porcentaje.

Proporcionalidad directa.

Las relaciones de proporcionalidad aparecen con mucha frecuencia en nuestra vida cotidiana. Para que dos magnitudes mantengan una relación de **proporcionalidad directa**, tienen que estar relacionadas de tal forma que si aumentamos la cantidad de una, la otra tiene que aumentar también proporcionalmente, y lo mismo ocurre si reducimos una de ellas. Por ejemplo, si duplicamos una, la otra se tiene que duplicar, si la triplicamos la otra también se triplica, y si la reducimos a la mitad, la otra también se tiene que reducir a la mitad. Esto se traduce matemáticamente como: dos magnitudes x e y son directamente proporcionales si existe una constante a, llamada **constante de proporcionalidad**, tal que

$$y = ax.$$

NO CORRESPONDE

Estamos rodeados de magnitudes directamente proporcionales entre sí, como veremos en los ejemplos contenidos hasta finalizar esta sección.

Para resolver un problema de proporcionalidad directa se puede utilizar:

- La constante de proporcionalidad.
- Una regla de tres simple.

En el siguiente ejemplo recordamos estas dos formas de resolución de problemas de proporción directa.

Ejemplo 174. **Proporción directa.** Sabiendo que 16 entradas para el cine costaron \$3840, determinar el precio de 29 entradas (estamos suponiendo que no hay ningún tipo de promoción).

Solución 1: hallando la constante de proporcionalidad. Puesto que la cantidad de entradas a adquirir (x) es directamente proporcional al dinero a abonar (y), sabemos que existe una constante a tal que $y = ax$, lo que equivale a $a = \frac{y}{x}$ cuando $x \neq 0$. Reemplazando x e y por los datos dados, tenemos que

$$a = \frac{3840}{16} = 240.$$

Entonces, el precio a abonar en pesos en función de la cantidad de entradas está dado por

$$y = 240x.$$

Esto implica que el valor de 29 entradas será de $y = 240 \cdot 29 = 6960$ pesos. Notar que la constante de proporcionalidad a corresponde al *valor de la unidad*, lo que en este caso corresponde al valor de una sola entrada.

Solución 2: usando regla de tres simple. La regla de tres simple es una operación que tiene por objetivo hallar el cuarto término de una proporción, cuando se conocen tres. Recordamos a continuación el método para magnitudes directamente proporcionales*:

$$\left.\begin{array}{ccc} 16 & \longrightarrow & 3840 \\ 29 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \Longrightarrow x = \frac{29 \cdot 3840}{16} = 6960,$$

obteniendo así el mismo resultado que con el método anterior. «

*Por simplicidad en la escritura, no colocaremos aquí las unidades correspondientes a las cantidades involucradas. Se recomienda al alumno hacerlo en caso de que esto ayude a "encolumnar" de manera correcta dichas cantidades. Recordar que, al resolver, las unidades deben "cancelarse" de forma que el resultado quede indicado en la unidad adecuada.

Ejemplo 175. Al llegar al hotel nos entregaron un mapa con los lugares de interés de la ciudad. El mapa está realizado a escala, y dice que 5 centímetros del mapa representan 800 metros de la realidad. Queremos visitar un puente que se encuentra a 13 centímetros del hotel en el mapa. ¿A qué distancia del hotel se encuentra este puente?

Solución: Aplicaremos regla de tres simple para hallar la distancia x en metros:

$$\left.\begin{array}{ccc} 5 & \longrightarrow & 800 \\ 13 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \Longrightarrow x = \frac{13 \cdot 800}{5} = 2080,$$

por lo que la distancia del puente al hotel es de 2080 metros. «

% Un caso particular de lo anterior es el cálculo de porcentajes. El **porcentaje** se denota* utilizando el símbolo $\%$, que matemáticamente equivale a multiplicar por el factor 0.01. Por ejemplo, "veintiocho por ciento" se representa como $28\,\%$ y equivale a multiplicar por 0.28. Entonces, para obtener el $28\,\%$ de 1600 se multiplica $1600 \cdot 0.28 = 448$. Esto proviene de aplicar la regla de tres simple, teniendo en cuenta que el cien por ciento es el total:

$$\left.\begin{array}{ccc} 100\,\% & \longrightarrow & 1600 \\ 28\,\% & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \Longrightarrow x = \frac{28 \cdot 1600}{100} = 448.$$

Ejemplo 176. **Calculando un descuento.** Una prenda de vestir que cuesta $\$780$ tiene un descuento de un $15\,\%$ por fin de temporada. Determinar el monto del descuento y el precio que, finalmente, se pagará por la prenda.

Solución: Si x denota el descuento de la prenda, entonces

$$\left.\begin{array}{ccc} 100\,\% & \longrightarrow & 780 \\ 15\,\% & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \Longrightarrow x = \frac{15 \cdot 780}{100} = 117.$$

Por lo tanto el descuento es de $\$117$ pesos, y el precio final de la prenda es de $\$663$. «

Ejemplo 177. **Calculando el porcentaje de descuento.** El precio de un teléfono celular es de $\$8500$, pero si se paga al contado el precio es de $\$6970$. ¿Qué porcentaje de descuento se aplicó al precio original para obtener el importe por pago al contado?

*Aunque el símbolo % se ve frecuentemente escrito sin separación de la cifra que lo precede, la norma establecida por la Oficina Internacional de Pesos y Medidas determina que se debe dejar un espacio de separación entre el número y él. Esta información se extrajo en noviembre de 2018 de `http://aplica.rae.es/orweb/cgi-bin/v.cgi?i=QnkkivzhcyyaDhgI`.

Solución: El total de descuento es $8500 - 6970 = 1530$ pesos. La consigna es determinar qué porcentaje del precio original representa esta cantidad. Es decir, buscamos x tal que

$$x \cdot \frac{8500}{100} = 1530.$$

Resolviendo la ecuación se obtiene $x = 1530 \cdot \frac{100}{8500} = 18$, lo que significa que el descuento aplicado fue del $18\,\%$. «

Ejemplo 178. **Calculando el precio antes del descuento.** Al aplicarle un descuento del $20\,\%$ a una bicicleta, el precio obtenido es de \$6300. ¿Cuál era el precio de la bicicleta antes de aplicarle el descuento?

Solución: Sabemos que si al precio original le restamos el descuento, se obtiene 6300 (pesos). Si denotamos con x al precio de la bicicleta antes del descuento, entonces esto se escribe como:

$$x - 20 \cdot \frac{x}{100} = 6300.$$

Resolvamos esta ecuación:

$$x - 0.2x = 6300 \iff 0.8x = 6300 \iff x = 7875.$$

Entonces, el precio de la bicicleta antes del descuento es de \$7875. Una opción alternativa de razonar el problema es que si el descuento es del $20\,\%$, entonces lo que pagamos es el $80\,\%$ del importe, es decir, $0.8x = 6300$. «

Ejercicios 5.2

1. Graficar en un mismo sistema de ejes las tres rectas dadas en cada inciso:

(a) $y = 2x + 3$; $y = 2x - 1$; $y = 2x$.
(b) $y = x + 2$; $y = 3x + 2$; $y = \frac{1}{2}x + 2$.
(c) $y = 4x$; $y = -2x$; $y = -\frac{1}{2}x$.
(d) $y = -x + 1$; $y = -x + 2$; $y = -x - 2$.
(e) $y = -3x + \frac{1}{2}$; $y = -3x - 2$; $y = \frac{1}{3}x$.
(f) $y = 2$; $y = -\frac{1}{2}$; $x = 2$.

2. Determinar en cada caso si los puntos dados pertenecen o no a la recta correspondiente al gráfico de la función:

(a) $y = -\frac{1}{2}x + 1$; $P = (2,0)$; $Q = (4,3)$.
(b) $y = 5x - 1$; $P = (1,3)$; $Q = (0,-2)$.
(c) $y = \frac{1}{3}x + 4$; $P = (3,5)$; $Q = (0,4)$.

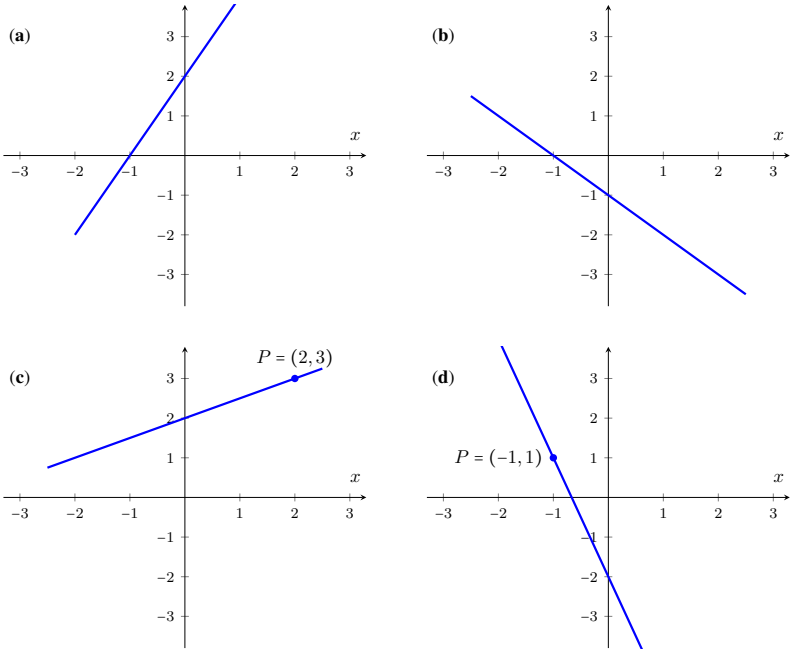
3. Hallar la ecuación de la recta que satisface las condiciones dadas:

(a) Tiene pendiente -3 y ordenada al origen 4.
(b) Su pendiente es 5 y su raíz es $x = -1$.
(c) Tiene pendiente -2 y pasa por el punto $(1, 5)$.
(d) Su ordenada al origen es -3 y pasa por el punto $(2, -4)$.

4. Hallar en cada caso la ecuación de la recta que tiene la pendiente indicada y pasa por el punto dado:

(a) $m = 2$; $P = (-3, 1)$.
(b) $m = -\frac{1}{3}$; $P = (4, 2)$.
(c) $m = 5$; $P = (3, -3)$.

5. Hallar la ecuación de las rectas dadas en los siguientes gráficos:



6. Mediante la fórmula dada en la página 184, determinar la pendiente de la recta que une al par de puntos dados en cada inciso. Utilizarla para hallar la ecuación de la recta que pasa por ellos.

(a) $P = (-2, -4)$; $Q = (1, 5)$.
(b) $P = (1, 2)$; $Q = (0, 4)$.
(c) $P = (2, 4)$; $Q = (-4, 1)$.
(d) $P = (-1, 3)$; $Q = (3, -1)$.
(e) $P = (2, 0)$; $Q = (4, 3)$.
(f) $P = (3, -5)$; $Q = (-1, 1)$.

7. Comprobar los resultados obtenidos en cada inciso del ejercicio anterior, ingresando los puntos y trazando la recta que los une. Luego, con el comando Pendiente o su ícono gráfico  hallar la pendiente de la recta trazada.

8. Hallar la pendiente y ordenada al origen de las siguientes rectas:

(a) $3y + 2x = -4$

(b) $-2y + 6x = 8$

(c) $\frac{1}{2}y - 3x = \frac{5}{4}$

(d) $6y - 2x - 18 = 0$

(e) $-y + 3x + \pi = 0$

(f) $-y + 4x + 5 = 0$

9. Demostrar que las rectas con ecuaciones $-2y + 8x = 6$ y $3y - 12x - 15 = 0$ son paralelas.

10. Hallar la ecuación de la recta que satisface las condiciones en cada inciso:

(a) Su ordenada al origen es -2 y es paralela a $y = -4x + 1$.

(b) Pasa por el punto $(1, 8)$ y es paralela a $y = 3x + 3$.

(c) Es paralela a $y = -\frac{2}{3}x + 1$ y su raíz $x = 6$.

(d) Es perpendicular a $y = -\frac{5}{4}x$ y pasa por el origen.

(e) Pasa por el punto $(1, 1)$ y es perpendicular a $y = \frac{1}{3}x + 8$.

(f) Su raíz es $x = -2$ y es perpendicular a $y = -2x + 7$.

11. Hallar la ecuación de la recta con ordenada al origen -3, que sea perpendicular a la que pasa por los puntos $P = (2, 6)$ y $Q = (-2, 3)$.

12. Hallar la ecuación de la recta paralela a la que une los puntos $(1, -4)$ y $(-1, 6)$, que pasa por el punto $(1, -2)$.

13. Actividad en GeoGebra:



Ingresar tres puntos cualesquiera (no alineados).


Trazar una recta por dos de ellos.


Trazar la recta paralela a ella que pase por el punto restante.


Trazar la recta perpendicular a ellas, por el mismo punto.


Mover la primera recta trazada, para observar cómo el resto se mueve en forma dinámica manteniendo las propiedades del gráfico.

14. En un cierto empleo se paga un monto fijo mensual de $2300, más $120 por cada hora de trabajo.

(a) Hallar la función que indique el sueldo mensual de un empleado en función de las horas de trabajo.

(b) Determinar lo que cobrará un empleado en el mes que trabajó 20 horas.

(c) Determinar la cantidad de horas que debe trabajar un empleado al mes para cobrar $23900.

(d) ¿Cuál es el mínimo de horas mensuales que deberá trabajar para que el sueldo supere los $25000?

15. Supongamos que un taxi cobra una tarifa inicial fija de $25 (bajada de bandera), más un costo de $0.3 por cada 10 metros recorridos.

(a) Hallar la función que indique el costo del viaje en función de los metros recorridos.

(b) Determinar el costo de un viaje de 2 kilómetros de recorrido.

(c) Determinar la cantidad de kilómetros que podemos recorrer si disponemos de $70.

16. Una empresa que fabrica paraguas tiene costos fijos de $2000, costos de producción de $20 por unidad y un precio de venta unitario de $50. Determinar las funciones de costos, ingresos y ganancias de la empresa. Graficar la función ganancia, y determinar la cantidad de paraguas que debe vender para obtener una ganancia de $10000.

17. Un club dispone de un salón para fiestas, que se alquila mediante dos opciones:

- Opción por invitado: se debe pagar $120 por cada persona que asista a la fiesta (incluyendo al organizador).
- Opción para socios: se permite que el organizador de la fiesta se asocie al club por un valor de $380 pesos, y cada persona que asista paga $90 (incluyendo al organizador).

Hallar la función que indique el precio del salón en cada uno de los casos en función de la cantidad de invitados. Indicar qué opción conviene si la cantidad total de personas que asisten es 18. ¿Y si asisten 11?

18. Determinar a cuántos grados Fahrenheit corresponden 25 °C, y cuántos grados Celsius equivalen a 68 °F (ver Ejemplo 168).

19. Un automóvil parte desde el reposo y aumenta uniformemente su velocidad durante 30 segundos. Sabiendo que la velocidad pasa de 2 m/s a 6 m/s en 5 segundos, se pide:

(a) La fórmula de la velocidad en función del tiempo para cada instante hasta los 30 segundos.

(b) La velocidad que alcanza a los 30 segundos, expresada en km/h.

(c) El momento en el que alcanza los 60 km/h.

20. Un móvil con una velocidad de 40 m/s frena, de manera que disminuye la misma uniformemente a razón de 5 m/s^2. Calcular el tiempo transcurrido hasta que se detiene por completo.

21. Se deja caer una pelota desde una altura de 56 metros. Determinar:

(a) El tiempo que tarda en caer.

(b) La velocidad con la que llega al suelo.

22. Desde una altura de 35 metros se arroja hacia abajo una llave con una velocidad inicial de -30 m/s^2. Calcular:

(a) El tiempo que tarda en caer.

(b) La velocidad con la que llega al suelo.

23. Desde el techo de un edificio se deja caer una piedra, la cual llega al suelo 4 segundos después. Calcular:

(a) La altura del edificio.

(b) La velocidad de la piedra al llegar al suelo.

24. ¿Con qué velocidad inicial debe lanzarse verticalmente un objeto hacia abajo desde una altura de 48 metros, para que llegue al suelo 2 segundos después?

25. Un objeto que es lanzado hacia arriba desde el nivel del suelo vuelve a caer a los 7 segundos. ¿Con qué velocidad inicial se lanzó? ¿Con qué velocidad inicial debería haber sido lanzado para que vuelva al suelo a los 6 segundos?

26. Se lanza una moneda hacia arriba verticalmente desde una altura de 1.20 metros, con una velocidad inicial de 30 m/s.

(a) Determinar cuánto demora la moneda en caer al suelo, y la velocidad con la que llega.

(b) Hallar el instante en que la velocidad de la moneda es cero.

(c) Sabiendo que la altura máxima de la moneda corresponde al instante en que su velocidad es cero, determinar la altura máxima alcanzada.

27. Un obrero tira ladrillos verticalmente desde el suelo a un andamio situado a 4 metros de altura, con una velocidad inicial de v_0 m/s.

(a) Determinar las funciones de velocidad y altura del ladrillo en cada instante, suponiendo la altura inicial $y_0 = 0$.

(b) Sabiendo que la altura máxima del ladrillo corresponde al instante en que su velocidad es cero, determinar v_0 para que el ladrillo llegue a la altura del andamio e indicar cuánto tiempo demora en llegar.

28. En un plano hecho a escala se indica que 2.6 cm corresponden a 300 metros.

(a) Dos monumentos se encuentran en extremos opuestos de una avenida que tiene 1.8 km de largo. ¿Qué distancia hay en el plano entre los monumentos?

(b) En el plano, ¿cuántos centímetros representan 100 metros?

(c) Si dos lugares se encuentran a 12.3 cm en el plano, ¿a qué distancia se encuentran en la ciudad?

29. En una panadería se utilizan 56 kg de harina para producir 70 kg de pan. Hallar la cantidad de harina necesaria para producir 98 kg de pan.

30. Un examen posee 20 preguntas, y para aprobar se necesita responder correctamente el $70\,\%$ de ellas. ¿Cuántas respuestas correctas se necesitan para aprobar?

31. Para obtener la regularidad en una asignatura se requiere un $80\,\%$ de asistencia a las clases.

(a) Si la cantidad total es de 48 clases, ¿a cuántas clases se necesita asistir como mínimo para ser regular?

(b) Si un alumno asistió a 36 clases, ¿cuál es su porcentaje de asistencia?

(c) Si sabemos que el porcentaje de asistencia de un alumno es del $62.5\,\%$, ¿a cuántas clases faltó?

32. Juan cobra $\$36000$ al mes y paga $\$6480$ de impuestos. ¿Qué porcentaje de impuestos paga?

33. En una tienda de ropa hay $20\,\%$ de descuento por cambio de temporada. Si por un abrigo el descuento fue de $\$150$, ¿cuál era el precio original del abrigo y cuál es el precio final?

34. Con un descuento del $18\,\%$, una silla costó $\$574$. ¿Cuál era el precio antes del descuento?

35. La factura del teléfono antes de añadirle el 21 % del IVA es de \$345. ¿Cuál es el precio final de la factura?

36. El precio final de la factura de gas, incluyendo el 21 % del IVA es de \$640. ¿Qué monto corresponde al IVA?

37. En una población de 27000 habitantes, el 82 % tiene más de 18 años. Determinar la cantidad de habitantes que esto representa.

38. El sueldo de un empleado corresponde al 14 % de las ventas que realice en el mes. ¿Cuánto tendrá que vender en un mes para que su sueldo sea de \$28000?

5.3. Sistemas de ecuaciones lineales: interpretación gráfica

En la Sección 4.4 estudiamos métodos para hallar analíticamente las soluciones de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, el cual es uno de la forma

$$\begin{cases} a_1x + b_1y &= c_1, \\ a_2x + b_2y &= c_2, \end{cases}$$

donde a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 y c_2 son números reales, y las incógnitas son x e y. Aprendimos a resolver este tipo de sistemas por sustitución y por igualación, y prometimos justificar en este capítulo la afirmación sobre la cantidad de soluciones del mismo. Habíamos afirmado que solamente puede ocurrir una y solo una de las siguientes opciones:

- Tiene una solución única (sistema compatible determinado).
- Tiene infinitas soluciones (sistema compatible indeterminado).
- No tiene solución (sistema incompatible).

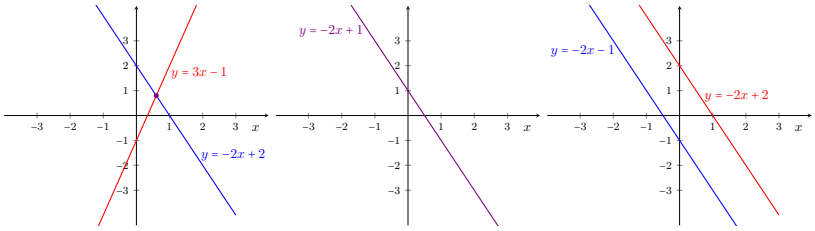
Recordemos que una solución al sistema son valores para x e y que satisfacen ambas igualdades a la vez. Reescribiendo las ecuaciones del sistema obtenemos

$$\begin{cases} y &= -\frac{a_1}{b_1}x + \frac{c_1}{b_1}, \\ y &= -\frac{a_2}{b_2}x + \frac{c_2}{b_2}, \end{cases}$$

siempre que b_1 y b_2 sean distintos de cero. Si $b_1 = 0$ y $a_1 \neq 0$, la primera ecuación se reescribe como $x = \frac{c_1}{a_1}$, lo que corresponde a una recta vertical, y análogamente se procede si $b_2 = 0$ y $a_2 \neq 0$. Entonces se puede observar que cada ecuación de un sistema de dos ecuaciones lineales, corresponde a la de una recta. Un punto (x, y) será solución del sistema si satisface ambas ecuaciones a la vez, lo que significa que debe pertenecer a ambas rectas. Gráficamente hay solo 3 posibilidades para dos rectas:

- Que se corten en un único punto: solución única.
- Que sean la misma recta (son coincidentes): infinitas soluciones.
- Que no se corten (son paralelas): sin solución.

Ilustramos a continuación estas posibilidades.



 Ya que resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas equivale a encontrar la intersección de las dos rectas involucradas, podemos utilizar la herramienta  para hallar dicho punto en caso de que exista. El comando correspondiente a esta herramienta es Interseca, como ya se indicó en la página 163.

Ejemplo 179. Determinar, sin resolver, la cantidad de soluciones del siguiente sistema:

$$\begin{cases} y &= 4x - 3, \\ y &= \frac{7}{5}x + 8. \end{cases}$$

Solución: Puesto que las dos rectas involucradas no tienen la misma pendiente, estas no serán paralelas. Además es claro que no son la misma recta, por lo que la única opción es que se intersequen en un único punto. En otras palabras, el sistema tiene una sola solución única, por lo que es compatible determinado. «

Ejemplo 180. La compañía A de telefonía celular ofrece un abono mensual que consiste en \$370 de base, más \$1 por cada minuto de llamada*. Por otro lado, la compañía B ofrece un plan de \$50 de base, más \$5 por cada minuto de llamada utilizado. Hallar el costo mensual de cada empresa en función de los minutos de llamada utilizados y determinar para qué cantidad de minutos ambos planes tiene el mismo precio, y cuál es dicho importe. A partir de la gráfica, determinar además qué compañía ofrece un plan más conveniente según el uso.

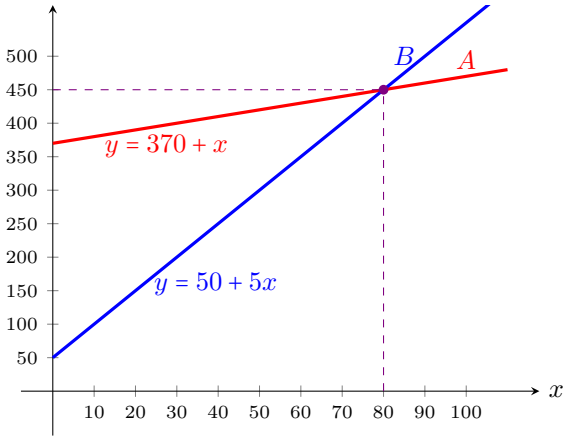
Solución: Sea x la cantidad de minutos de llamada utilizados en el mes. El costo mensual de la compañía A está dado por $f(x) = 370 + x$, mientras que el de

*Recordemos que estamos considerando el tiempo como "continuo", lo que nos permite suponer que el costo de la llamada se fracciona por cada instante utilizado, sin importar lo pequeño que sea.

la compañía B es $g(x) = 50 + 5x$. Para hallar la cantidad de minutos para los cuales los importes de ambas compañías coinciden, debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} y &= 370 + x, \\ y &= 50 + 5x. \end{cases}$$

Esto equivale a hallar la intersección de las rectas graficadas a continuación:



Resolviendo por igualación obtenemos

$$370 + x = 50 + 5x \Leftrightarrow 320 = 4x \Leftrightarrow x = 80.$$

Reemplazando en cualquiera de las ecuaciones se obtiene $y = 450$. Esto significa que si se utilizan 80 minutos mensuales, entonces el precio de ambos planes es de $\$450$. Como se puede observar en el gráfico, si un usuario consume menos de 80 minutos mensuales, le conviene el plan que ofrece la compañía B, pero si los supera entonces le conviene contratar a la compañía A. «

Ejemplo 181. Brenda y Franco viven sobre una calle recta, a una distancia de 780 metros, y deciden salir caminando al mismo tiempo desde sus respectivas casas hacia la del otro. Ambos caminan a velocidad constante durante su recorrido, pero uno más rápido que el otro: Brenda avanza 28 metros por minuto, mientras que Franco recorre 148 metros en 4 minutos. Determinar cuánto demoran en encontrarse y la distancia recorrida por cada uno hasta ese momento. Además, calcular el tiempo que demora Franco en llegar a la casa de Brenda, suponiendo que mantiene la misma velocidad.

Solución: La velocidad de Brenda es de 28 metros por minuto. La velocidad de Franco la podemos calcular con la fórmula de la pendiente con los puntos $(0, 0)$ y $(4, 148)$, o bien por regla de tres simple, para concluir que es de 37 metros por

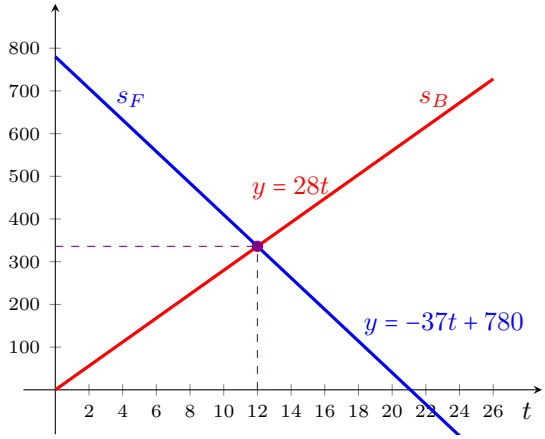
minuto. Sabemos que en un MRU la posición en función del tiempo está dada por

$$s(t) = vt + s_0,$$

siendo s_0 la posición inicial y v la velocidad. Supongamos que nuestro punto de referencia es la casa de Brenda, es decir, ubicamos allí el origen de coordenadas. Entonces, las posiciones de Brenda y Franco están dadas respectivamente por:

$$s_B(t) = 28t, \qquad s_F(t) = -37t + 780,$$

donde t indica los minutos desde el momento de la salida. Observar el signo menos en la velocidad de Franco, que indica que caminan en direcciones opuestas (cuando Franco camina, se acerca a la casa de Brenda). Gráficamente, la distancia de cada uno a la casa de Brenda luego de t minutos de haber salido se representa en la figura siguiente:



El punto de intersección de las dos rectas corresponde a la solución del sistema

$$\begin{cases} y &= 28t, \\ y &= -37t + 780, \end{cases}$$

la cual es $t = 12$ e $y = 336$. Es decir, se encontrarán a los 12 minutos de haber salido, Brenda habrá recorrido 336 metros, con lo cual Franco habrá recorrido $780 - 336 = 444$ metros. Finalmente, el tiempo que demora Franco en llegar hasta la casa de Brenda corresponde a hallar t tal que $s_F(t) = 0$ (recordemos que ubicamos el origen en la casa de Brenda). Entonces resolvemos

$$0 = -37t + 780 \iff t = \frac{780}{37} \approx 21,$$

lo que nos dice que demorará 21 minutos aproximadamente, lo que coincide con lo obtenido en el gráfico. «

Ejercicios 5.3

1. Hallar gráfica y analíticamente la intersección de las rectas de ecuaciones $y = -3x + 1$ e $y = 2x - 4$.

2. Determinar, sin resolver el sistema, si las rectas $y = 4x + 2$ e $y = 4x + \sqrt{2}$ se intersecan en algún punto. Justificar.

3. Resolver gráfica y analíticamente los siguientes sistemas:

$$\textbf{(a)} \begin{cases} y &= -3x + 6 \\ y &= 2x + 1 \end{cases} \qquad \textbf{(b)} \begin{cases} 2y - 8x &= 4 \\ -3x - y + 2 &= 0 \end{cases}$$

4. Dentro de 9 años, la edad de Matías superará en 4 años a la mitad de la edad de su hermana Clara. Determinar la edad que tienen hoy ambos, sabiendo que cuando Matías nació, Clara tenía 3 años.

5. Se dispone de la siguiente información* (por kilogramo) sobre los alimentos mencionados:

- Banana: 1000 calorías y 10 gramos de proteínas.
- Helado de crema: 2000 calorías y 40 gramos de proteínas.

Al llegar a su nutricionista, un paciente afirmó que desde la consulta anterior hasta ese día, con lo que consumió de bananas y helado de crema ingirió 4400 calorías y 60 gramos de proteínas. Hallar gráfica y analíticamente la cantidad de bananas y de helado de crema que consumió.

6. En un club el valor mensual de la cuota societaria es de $\$480$, pero no incluye el acceso a la pileta de natación. Este acceso tiene un costo diario de $\$120$, con un descuento del $40\,\%$ para socios.

(a) Hallar la función que determine el costo mensual en función de la cantidad de días de acceso a la pileta para cada caso (socios y no socios), y graficar ambas rectas en un mismo sistema.

(b) Determinar la cantidad de días de acceso a la pileta que implican el mismo costo mensual para socios y no socios.

(c) Si una persona desea ingresar a la pileta 6 días al mes, ¿le conviene o no asociarse? ¿Y si quiere ingresar 14 días?

7. Sheila es estudiante de medicina, y debe comprarse un estetoscopio y un martillo para evaluar reflejos. El martillo cuesta la mitad de lo que cuesta el estetoscopio, y el precio por ambos artículos es de $\$675$. Determinar gráfica y analíticamente el precio de cada uno.

*Datos aportados por la Lic. en Nutrición Melina Flesia (M. P. 560), redondeados para facilitar los cálculos.

8. Un comerciante invierte su dinero en dos productos: uno da un $6\,\%$ de ganancia, y el otro da $10\,\%$. Sin embargo, decide usar el doble de dinero para el producto que rinde menos, porque es más fácil de vender. Si la ganancia resultó de $\$3300$, ¿cuánto invirtió en cada producto?

9. Se dipone de dos soluciones de salmuera (más de un litro de cada una), una contiene $5\,\%$ de sal y otra contiene $20\,\%$ de sal. ¿Cuántos mililitros de cada solución se deben mezclar para obtener 1 litro de una solución que contenga $18\,\%$ de sal?

10. Se necesita formar una pintura violeta que contenga $40\,\%$ de rojo y $60\,\%$ de azul. Para hacerlo se dispone de dos tarros de pintura de un litro cada uno que se componen de la siguiente forma: el primero contiene $25\,\%$ de rojo y $75\,\%$ de azul, y el segundo está formado por $55\,\%$ de rojo y $45\,\%$ de azul. Indicar la cantidad de cada tarro necesaria que hay que tomar para formar uno (es decir, de un litro de pintura) del color deseado.

11. En un teatro, un cierto día se vendieron un total de 658 entradas, entre un espectáculo infantil y una comedia para adultos. Sabiendo que la cantidad de asistentes al primero es igual a $\frac{4}{3}$ de la cantidad de asistentes al segundo, determinar el número de entradas vendidas para cada uno.

12. Un excursionista realizó en dos tramos una caminata de 40 kilómetros en una montaña. Lo recorrido durante el primer tramo excede en 4 al doble de los kilómetros caminados durante el segundo. Determinar la cantidad de kilómetros recorridos en cada tramo.

13. Un detective fue contratado para descifrar un antiguo código secreto compuesto por 8 dígitos, en el cual los primeros 4 corresponden al año de nacimiento de Leonardo, y los últimos 4 al año de nacimiento de su hija Isabel. Pudo averiguar que Isabel nació el día que Leonardo cumplía 23 años de edad, y que en el año 1850 la edad de Isabel excedía en 10 años a la mitad de la edad de Leonardo. ¿Cuál es el código?

14. Replantear las ecuaciones del Ejemplo 181 colocando el origen de coordenadas en la casa de Franco. Luego, resolverlo utilizando GeoGebra.

15. Utilizar GeoGebra para resolver los siguientes sistemas:

$$\textbf{(a)}\begin{cases} 2x - y &= 5 \\ x + 4y &= 7 \end{cases} \qquad \textbf{(b)}\begin{cases} 8x - 2y &= 5 \\ -12x + 3y &= 7 \end{cases}$$

$$\textbf{(c)}\begin{cases} x - y &= 1 \\ 4x + 3y &= 18 \end{cases} \qquad \textbf{(d)}\begin{cases} -2x + y &= 1 \\ 6x - 3y &= -3 \end{cases}$$

(c) ¿Cuál es el costo de **cada litro** de esta mezcla? ¿Cuántas unidades de cada nutriente posee cada litro de la mezcla?

(d) ¿Qué porcentaje de cada fertilizante posee la mezcla?

9. Daiana fabrica tazas y mates de cerámica estampados, para lo cual utiliza calcomanías vitrificables negras y de color. Para cada taza emplea dos negras y una de color, y obtiene una ganancia de \$30, mientras que por cada mate emplea dos negras y dos de color, y la ganancia es de \$50. Si dispone de 500 calcomanías negras y 300 de color, ¿cuántas tazas y mates debe producir y vender para maximizar la ganancia? ¿Cuál es el importe de la misma?

10. Supongamos que en el problema anterior, Daiana desea entregar una cuchara con cada taza y una bombilla con cada mate, lo cual no afecta el importe de la ganancia. Sin embargo, Daiana dispone solamente de 130 cucharas y 120 bombillas, y no está dispuesta a vender los productos sin su accesorio correspondiente.

(a) Plantear el sistema con las restricciones del problema y graficar la región factible.

(b) Indicar la cantidad de tazas y mates que debe producir y vender para que la ganancia sea máxima, y cuál es su importe.

(c) Determinar si al fabricar la cantidad óptima quedan calcomanías sin utilizar. En tal caso, indicar el tipo y cantidad sobrante.

NO CORRESPONDE

5.5. Función cuadrática

Nos ocuparemos ahora de analizar las funciones polinómicas de grado 2, es decir, las funciones de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

siendo a, b y c números reales, con $a \neq 0$. Una función de este tipo es llamada **función cuadrática**. Por ser una función polinómica, su dominio es el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.

Ejemplo 186. Las siguientes son funciones cuadráticas:

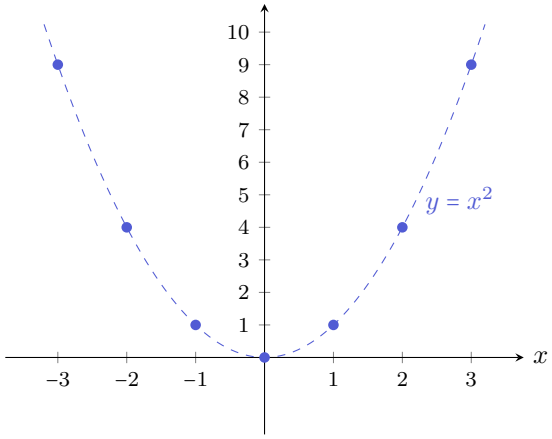
$$y = 3x^2 - 5x + 4, \qquad y = -\tfrac{1}{4}x^2 + 5x,$$
$$y = x^2 - 6, \qquad y = -4x^2, \qquad y = \pi x + 5 - 4x^2. \quad \ll$$

El primer paso será analizar el aspecto de la gráfica correspondiente a una función cuadrática, para lo cual recurriremos a una tabla de valores. El objetivo será detectar su "forma", y el efecto producido en ella por cada uno de los parámetros a, b y c.

Ejemplo 187. **Esbozando el gráfico de $f(x) = x^2$.** En este caso $a = 1$ y $b = c = 0$. Representaremos esta función gráficamente, confeccionando primero una tabla de valores con una cantidad apropiada de puntos:

x	$y = x^2$
-3	$(-3)^2 = 9$
-2	$(-2)^2 = 4$
-1	$(-1)^2 = 1$
0	$0^2 = 0$
1	$1^2 = 1$
2	$2^2 = 4$
3	$3^2 = 9$

Luego, ubicamos los puntos obtenidos en un sistema de ejes coordenados, y los unimos con línea punteada:



«

Se denomina **parábola** a la forma que posee la gráfica realizada en el ejemplo anterior. Veremos que esta curva no se obtiene solamente para $y = x^2$, sino para cualquier otra función cuadrática. El aspecto de cada parábola se verá modificado con respecto a la anterior por los valores de a, b y c. Puesto que los cambios los vamos a comparar con respecto a la gráfica de $y = x^2$, denominamos a esta **parábola matriz**.

En el ejemplo anterior, notar que $f(-3) = f(3) = 9$, pues estamos elevando al cuadrado. Lo mismo pasa con cualquier otro valor, es decir $f(-x) = f(x)$ para cualquier número real x. Esto significa que la función toma el mismo valor para un número que para su opuesto, lo que se traduce en que la gráfica se "refleja" respecto del eje y. Hablando en términos matemáticos formales, esto significa

que la gráfica es **simétrica** con respecto al eje y, o que y es el **eje de simetría** de la parábola.

Notar también que la imagen de $f(x) = x^2$ es el conjunto $[0, \infty)$ de los reales no negativos. El punto $(0, 0)$ es llamado **vértice** de la parábola.

Comencemos explorando el efecto del coeficiente cuadrático a.

Ejemplo 188. **Gráfico de $f(x) = ax^2$.** En este caso también tenemos $b = 0$ y $c = 0$, pero tomaremos diferentes valores de a para detectar el efecto que produce con respecto a la parábola matriz. En particular, construiremos tablas de valores para las funciones dadas por

$$y = 3x^2, \qquad y = \tfrac{1}{2}x^2, \qquad y = -x^2, \qquad y = -2x^2.$$

Como en el caso de $y = x^2$, las funciones anteriores satisfacen $f(-x) = f(x)$, por lo que en las tablas incluiremos solamente valores positivos:

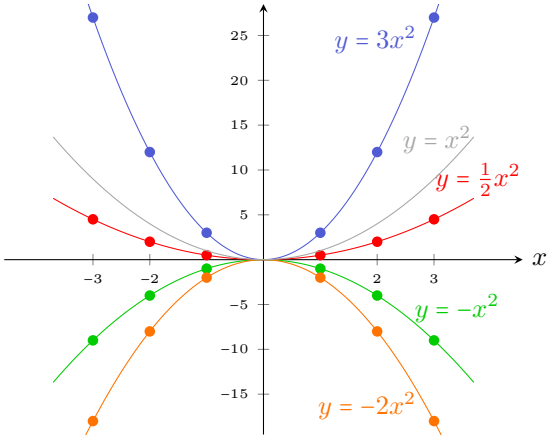
x	$y = 3x^2$
0	0
1	3
2	12
3	27

x	$y = \frac{1}{2}x^2$
0	0
1	$\frac{1}{2}$
2	2
3	$\frac{9}{2}$

x	$y = -x^2$
0	0
1	-1
2	-4
3	-9

x	$y = -2x^2$
0	0
1	-2
2	-8
3	-18

Representamos a continuación los puntos (con el color indicado en cada tabla), y también los correspondientes opuestos, unidos con una línea curva. Además graficamos con gris la parábola matriz.

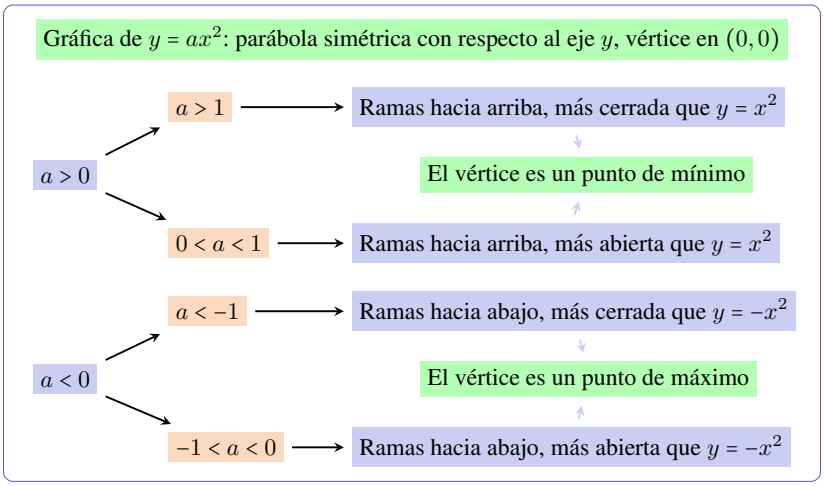


Del ejemplo anterior podemos concluir que el signo de a determina si las ramas de la parábola abren hacia arriba ($a > 0$) o hacia abajo ($a < 0$). Además, si

el valor absoluto de a es menor que uno, las ramas son mas "abiertas" (quedando más cercanas al eje x) que las de la parábola matriz, mientras que si su valor absoluto es mayor que uno, las ramas comienzan a "cerrarse" más (quedando más cercanas al eje y). En todos los casos el eje de simetría es el eje y, y el vértice es $(0,0)$.

Un punto (x^*, y^*) perteneciente a la gráfica de una función f es un **punto de mínimo** si $f(x) \geq y^*$, para todo x en el dominio de f. Es decir, la ordenada y^* de un punto de mínimo indica el valor más pequeño que toma f, y la abscisa x^* indica dónde dicho valor mínimo fue alcanzado. Similarmente, la ordenada de un **punto de máximo** indica el valor más grande que toma f y, al igual que antes, la abscisa indica dónde fue alcanzado. No toda función posee un mínimo o un máximo en su conjunto imagen (pensar, por ejemplo, en $f(x) = x$, cuya imagen es $\mathbb{R}$), por lo que estos puntos no siempre existen. Para el caso de una parábola de la forma $y = ax^2$, el vértice $(0,0)$ es el punto de mínimo cuando $a > 0$, y el punto de máximo si $a < 0$.

Resumimos todo lo anterior en el siguiente cuadro:



Analizaremos ahora el efecto del parámetro c.

Ejemplo 189. **Gráfico de $f(x) = x^2 + c$.** Aquí $a = 1$ y $b = 0$, y tomaremos diferentes valores de c para detectar el efecto que produce con respecto a la parábola matriz. En particular, construiremos tablas de valores para las funciones dadas por

$$y = x^2 + 1, \qquad y = x^2 + 2, \qquad y = x^2 - 3.$$

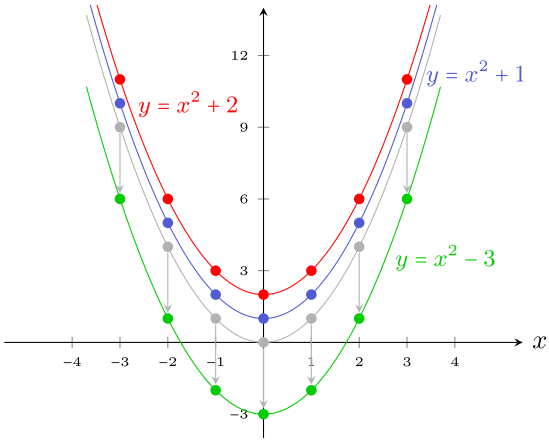
Como en el caso de $y = ax^2$, las funciones anteriores satisfacen $f(-x) = f(x)$ porque la variable x está elevada al cuadrado, por lo que en las tablas incluiremos solamente valores positivos de x:

x	$y = x^2 + 1$
0	$0^2 + 1 = 1$
1	$1^2 + 1 = 2$
2	$2^2 + 1 = 5$
3	$3^2 + 1 = 10$

x	$y = x^2 + 2$
0	$0^2 + 2 = 2$
1	$1^2 + 2 = 3$
2	$2^2 + 2 = 6$
3	$3^2 + 2 = 11$

x	$y = x^2 - 3$
0	$0^2 - 3 = -3$
1	$1^2 - 3 = -2$
2	$2^2 - 3 = 1$
3	$3^2 - 3 = 6$

Representamos en la figura siguiente los puntos (con el color indicado en cada tabla), unidos con una línea curva. Además graficamos con gris la parábola matriz.



«

Del ejemplo anterior concluimos que el parámetro c produce una traslación vertical de la parábola en $|c|$ unidades: hacia arriba si $c > 0$, y hacia abajo cuando $c < 0$.

El parámetro c traslada verticalmente a la parábola, por lo que las coordenadas del vértice para la gráfica de $f(x) = x^2 + c$ son $(0, c)$.

Ejemplo 190. **Gráfico de $y = ax^2 + c$.** Para analizar la gráfica de una función con esta forma, combinamos los efectos que producen los parámetros a y c. Por ejemplo, consideremos las funciones

$$f(x) = 2x^2 - 4, \qquad g(x) = -3x^2 + 5, \qquad h(x) = \tfrac{1}{2}x^2 + 1.$$

Analicemos la gráfica de cada función según los valores de a y c.

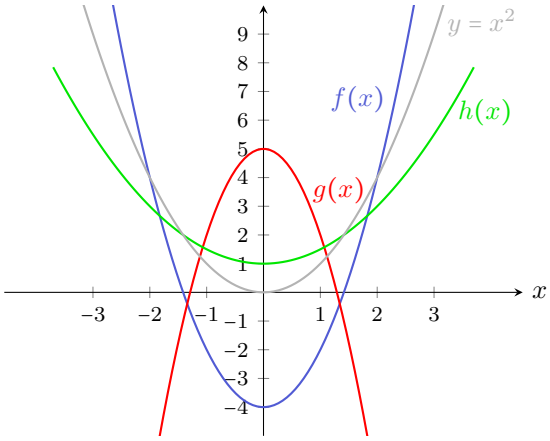
Gráfica de f. Puesto que $a = 2$, las ramas de la parábola abren hacia arriba, más cerradas que las de la parábola matriz. Además, su vértice es el punto $(0, -4)$,

es decir, se encuentra desplazada 4 unidades hacia abajo. El vértice corresponde al punto de mínimo.

Gráfica de g. Las ramas de la parábola son más cerradas que las de la matriz, pero abren hacia abajo pues $a = -3$. Se encuentra desplazada 5 unidades hacia arriba, y su vértice $(0, 5)$ es el punto de máximo.

Gráfica de h. Al ser $a = \frac{1}{2}$, las ramas abren hacia arriba pero más abiertas que las de la parábola matriz. Está desplazada una unidad hacia arriba, y su vértice $(0, 1)$ es el punto de mínimo.

Para corroborar estas conclusiones, las gráficas correspondientes a las funciones anteriores son las siguientes:



«

La parábola dada por $y = ax^2 + c$ es simétrica con respecto al eje y, su vértice es el punto $(0, c)$, y este corresponde al punto de máximo si $a < 0$, y al punto de mínimo si $a > 0$.

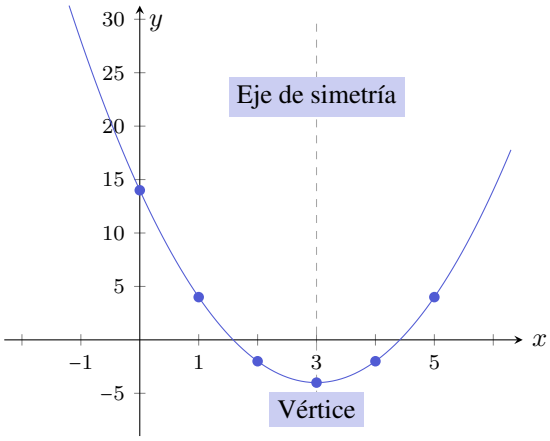
Analizaremos ahora el efecto que produce b. Si bien podemos sospechar que inducirá un desplazamiento de la parábola hacia los costados (izquierda o derecha), no es tan directo determinar dicho desplazamiento como en el caso de c. Para esto estudiaremos varios ejemplos.

Ejemplo 191. Graficar la función $y = 2x^2 - 12x + 14$.

Solución: Como siempre, haremos una tabla de valores. Pero esta vez la variable x no aparece solamente elevada al cuadrado, por lo que la función no tomará el mismo valor para x que para $-x$ (por ejemplo, en la tabla siguiente puede verse que $f(-2) \neq f(2)$). Así que incluiremos valores negativos y positivos en la tabla:

x	$y = 2x^2 - 12x + 14$
-2	$2 \cdot (-2)^2 - 12 \cdot (-2) + 14 = 46$
-1	$2 \cdot (-1)^2 - 12 \cdot (-1) + 14 = 28$
0	$2 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 + 14 = 14$
1	$2 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 14 = 4$
2	$2 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 14 = -2$
3	$2 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 + 14 = -4$
4	$2 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 14 = -2$
5	$2 \cdot 5^2 - 12 \cdot 5 + 14 = 4$

Ubicaremos ahora algunos de estos puntos en un sistema de ejes coordenados, y los uniremos con una línea:



Como podemos observar, el vértice de la parábola es el punto $(3, -4)$, y el eje de simetría es la recta de ecuación $x = 3$. Nos preguntamos si es posible obtener esta información desde la expresión de la función, sin tener que graficarla. La respuesta se obtiene completando cuadrados, como aprendimos a hacerlo en el Capítulo 4 (ver pág. 116):

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 12x + 14 = 2(x^2 - 6x + 7) \\ &= 2(x^2 - 6x + 9 - 9 + 7) = 2(x^2 - 6x + 9) - 4 \\ &= 2(x - 3)^2 + (-4). \end{aligned}$$

Podemos observar que en la fórmula anterior aparecen las coordenadas del vértice (la abscisa precedida por un signo menos). Las ramas de la parábola abren hacia arriba, pues $a = 2 > 0$. «

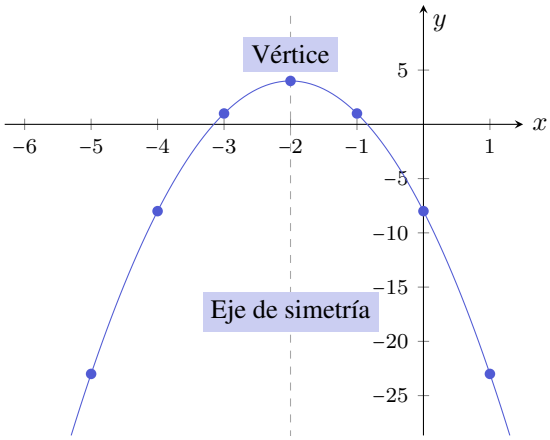
Veamos otro ejemplo para observar si ocurre lo mismo:

Ejemplo 192. Graficar la función $y = -3x^2 - 12x - 8$.

Solución: La tabla de valores para esta función es la siguiente:

x	$y = -3x^2 - 12x - 8$
-5	$-3 \cdot (-5)^2 - 12 \cdot (-5) - 8 = -23$
-4	$-3 \cdot (-4)^2 - 12 \cdot (-4) - 8 = -8$
-3	$-3 \cdot (-3)^2 - 12 \cdot (-3) - 8 = 1$
-2	$-3 \cdot (-2)^2 - 12 \cdot (-2) - 8 = 4$
-1	$-3 \cdot (-1)^2 - 12 \cdot (-1) - 8 = 1$
0	$-3 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 - 8 = -8$
1	$-3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 - 8 = -23$
2	$-3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 - 8 = -44$

A partir de esta tabla, ubicando algunos de los puntos y uniendo, se obtiene el siguiente gráfico:



Como podemos observar, el vértice de la parábola es el punto $(-2, 4)$, y el eje de simetría es la recta de ecuación $x = -2$. Completemos cuadrados en la expresión de la función cuadrática para ver si nuevamente estos valores aparecen:

$$\begin{aligned} y &= -3x^2 - 12x - 8 = -3(x^2 + 4x) - 8 \\ &= -3(x^2 + 4x + 4 - 4) - 8 = -3(x^2 + 4x + 4) + 12 - 8 \\ &= -3(x + 2)^2 + 4 = -3(x - (-2))^2 + 4. \end{aligned}$$

Aparecen, al igual que antes, las coordenadas del vértice con la abscisa precedida por un signo menos. Puesto que $a = -3 < 0$, las ramas de la parábola abren hacia abajo. «

Se dice que una función cuadrática está expresada en su **forma canónica** o **normal** cuando se la escribe como

$$y = a(x-h)^2 + k.$$

En tal caso, tenemos que:

- Su gráfica es una parábola con vértice $V = (h,k)$, y eje de simetría en la recta $x = h$.
- Si $a > 0$ las ramas abren hacia arriba, por lo que el vértice es el punto de mínimo: la función alcanza un **mínimo** en $x = h$, y ese mínimo es k.
- Si $a < 0$ las ramas abren hacia abajo, por lo que el vértice es el punto de máximo: la función alcanza un **máximo** en $x = h$, y ese máximo es k.

Observar que en la forma canónica de una función cuadrática hay un signo menos delante de la h que es parte de la fórmula. Luego, si

$$f(x) = 2(x+3)^2 + 5 = 2(x-(-3))^2 + 5,$$

entonces su vértice es el punto $(-3,5)$. Un error frecuente es decir que el vértice es $(3,5)$ ✗. Para k no ocurre lo mismo, ya que no tiene un signo menos en la fórmula.

Para esbozar la gráfica de una función cuadrática mediante una tabla de valores, es difícil saber de antemano cuáles y cuántos son los valores "apropiados" que debemos tomar para x. Uno tiende, en general, a tomar valores cercanos al cero, pero esto puede no ser adecuado para detectar la parte más significativa de la parábola. Por ejemplo, si el vértice fuera $(100,0)$, deberíamos tomar valores de x cercanos a 100 para localizarlo. En los Ejemplos 191 y 192, los valores de x que tomamos fueron elegidos convenientemente para "rodear" a la abscisa del vértice (pero, para conocerlo, completamos cuadrados). Resumiendo, para esbozar la gráfica de una función cuadrática, el método de completar cuadrados resulta más efectivo que el de la tabla de valores, en especial cuando el vértice de la parábola se encuentra desplazado horizontalmente.

Ejemplo 193. **Hallando el vértice de una parábola.** Determinar el vértice y el eje de simetría de las parábolas dadas por las funciones

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 5, \qquad g(x) = -x^2 - 6x + 1, \qquad p(x) = 3x^2 + 6x + 3.$$

Además, determinar si alcanzan un mínimo o un máximo, cuál es dicho valor y dónde lo alcanzan.

Solución: Completemos cuadrados en cada una para llevarlas a su forma canónica. Comenzamos con la función f:

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 5 = 2(x^2 - 2x) + 5 = 2(x^2 - 2x + 1 - 1) + 5 = 2(x-1)^2 + 3.$$

Entonces la parábola correspondiente a la gráfica de f tiene su vértice en $(1, 3)$. Puesto que $a = 2 > 0$, la función alcanza un mínimo en $x = 1$, y el valor de dicho mínimo es 3. El eje de simetría es la recta $x = 1$.

Ahora hacemos lo mismo con g:

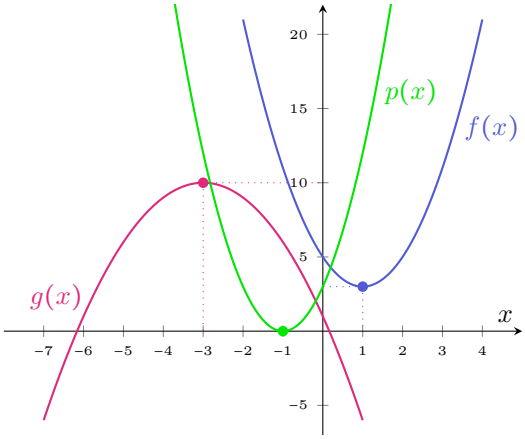
$$g(x) = -x^2 - 6x + 1 = -(x^2 + 6x + 9 - 9) + 1 = -(x^2 + 6x + 9) + 10 = -(x+3)^2 + 10.$$

Luego, la gráfica de g es una parábola con vértice en $(-3, 10)$ cuyas ramas abren hacia abajo. Por lo tanto g alcanza un máximo en $x = -3$, cuyo valor es 10. La gráfica es simétrica respecto de la recta $x = -3$.

Finalmente completamos cuadrados en la fórmula para p:

$$p(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x^2 + 2x + 1) = 3(x + 1)^2.$$

Por lo tanto, la parábola que corresponde al gráfico de p tiene su vértice en $(-1, 0)$, y sus ramas abren hacia arriba. Entonces p posee un mínimo en $x = -1$, cuyo valor es 0. El eje de simetría es la recta $x = -1$. Graficamos a continuación estas tres funciones cuadráticas.



«

Si la gráfica de f es una parábola con vértice en $(1, 3)$, es incorrecto decir:

"La función f alcanza un mínimo en $(1, 3)$." ✗

Lo correcto es:

"La función f alcanza un mínimo en $x = 1$, y ese mínimo es 3." ✓

Como vimos en el ejemplo anterior, expresar una función cuadrática en forma normal $f(x) = a(x - h)^2 + k$ nos ayuda a trazar su gráfica y a determinar si alcanza un valor máximo o mínimo. El proceso que nos permitió expresar la

función dada en su forma normal fue el de completar cuadrados. Para una función cuadrática general $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$, completando cuadrados como en la página 118, vemos que

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Así, las coordenadas del vértice $V = (h, k)$ están dadas por

$$h = -\frac{b}{2a}, \qquad k = c - \frac{b^2}{4a}.$$

Esto nos permite establecer la siguiente conclusión:

El valor máximo o mínimo de una función cuadrática dada como $f(x) = ax^2 + bx + c$ se alcanza en

$$x = -\frac{b}{2a}. \tag{5.5.1}$$

Si $a > 0$, el valor $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = c - \frac{b^2}{4a}$ es el **mínimo** alcanzado por f (pues las ramas de la parábola abren hacia arriba), y cuando $a < 0$ este valor corresponde al **máximo** alcanzado (pues las ramas abren hacia abajo).

De la fórmula anterior para la abscisa del vértice de una parábola podemos deducir el efecto del parámetro b, el cual producirá un desplazamiento horizontal que dependerá del parámetro a. Más precisamente, si a y b tienen el mismo signo entonces el número $h = -\frac{b}{2a}$ será negativo. De lo contrario, si tienen signos opuestos, el número h será positivo. Si $b = 0$, también $h = 0$. Luego:

El parámetro b traslada horizontalmente a la parábola: el vértice queda a la izquierda del eje y cuando a y b tienen el mismo signo, y a la derecha de dicho eje cuando tienen signos opuestos. Si $b = 0$, el vértice de la parábola se encuentra sobre el eje y.

Ejemplo 194. **Ubicando el vértice según los valores de a y b cuando $c = 0$.** Determinar en qué cuadrante se encuentra el vértice de la gráfica de cada una de las siguientes funciones cuadráticas, a partir de los signos de a y b:

$$f(x) = -x^2 - 4x, \quad g(x) = x^2 + 4x, \quad h(x) = x^2 - 6x, \quad p(x) = -2x^2 + 6x.$$

Solución: Sabemos que la relación entre los signos de a y b determina un desplazamiento horizontal de la gráfica de una función cuadrática. Además, cuando

$c = 0$ (como en cada una de las funciones dadas), los signos de estos parámetros permiten determinar en qué cuadrante se encuentra el vértice de la parábola. Si $c = 0$, la ordenada del vértice es $k = -\frac{b^2}{2a}$. Si además $b = 0$, entonces k también es nulo y el vértice se encuentra en el origen. Si no, puesto que b^2 es siempre positivo, el signo de k queda determinado por el signo de a: los signos de a y k son opuestos. Así, cuando a es positivo, la ordenada k del vértice es negativa, por lo que el mismo se encuentra debajo del eje x (es decir, en el tercer o cuarto cuadrante). En caso contrario, cuando a es negativo, el vértice se encuentra por encima del eje x (en el primer o segundo cuadrante).

Apliquemos todo lo anterior a cada una de las funciones dadas.

Vértice de f. En este caso tenemos $a = -1$ y $b = -4$. Puesto que tanto a como b tienen igual signo (en este caso, negativo), el vértice se encuentra a la izquierda del eje y, es decir, en el segundo o tercer cuadrante. Pero además, debido a que a es negativo, el mismo se encuentra por encima del eje x lo que, junto a lo anterior, implica que el vértice se encuentra en el segundo cuadrante.

Vértice de g. Aquí $a = 1$ y $b = 4$. Nuevamente a y b tienen igual signo (en este caso, positivo), por lo que el vértice se encuentra a la izquierda del eje y, es decir, en el segundo o tercer cuadrante. Pero ahora a es positivo, por lo que el vértice debe estar debajo del eje x. Se concluye, entonces, que el mismo está en el tercer cuadrante.

Vértice de h. Aquí $a = 1$ y $b = -6$. Ahora a y b tienen signos opuestos, por lo que el vértice se encuentra a la derecha del eje y, es decir, en el primer o cuarto cuadrante. Además, puesto que a es positivo, el mismo debe estar debajo del eje x, lo que conduce a concluir que el vértice se encuentra en el cuarto cuadrante.

Vértice de p. Aquí $a = -2$ y $b = 6$. Al igual que en el caso anterior, a y b tienen signos opuestos, por lo que el vértice se encuentra a la derecha del eje y, es decir, en el primer o cuarto cuadrante. Pero ahora a es negativo, por lo que el vértice debe estar por encima del eje x, lo que implica que el mismo se encuentra en el primer cuadrante.

En la Figura 5.6 se encuentran representadas gráficamente cada una de las funciones, para corroborar las conclusiones obtenidas. «

El razonamiento realizado en el ejemplo anterior para la ubicación del vértice de la gráfica de una función cuadrática cuando $c = 0$ se ilustra en la Figura 5.7.

En el siguiente ejemplo se analiza qué relación tiene la cantidad de raíces de una función cuadrática con la ubicación de su gráfica en el plano.

Ejemplo 195. **Raíces de una función cuadrática: enfoque gráfico.** Hallar las raíces de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ equivale a resolver la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

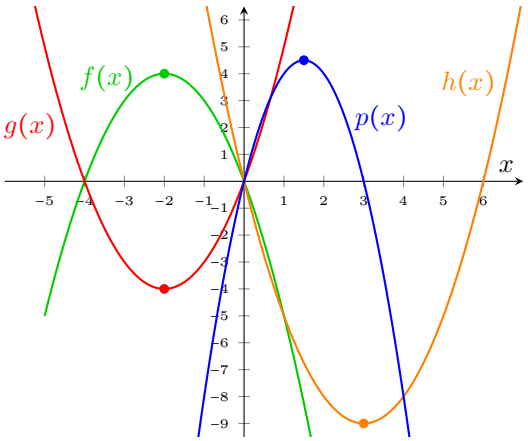


Figura 5.6: Gráfico de las funciones del Ejemplo 194.

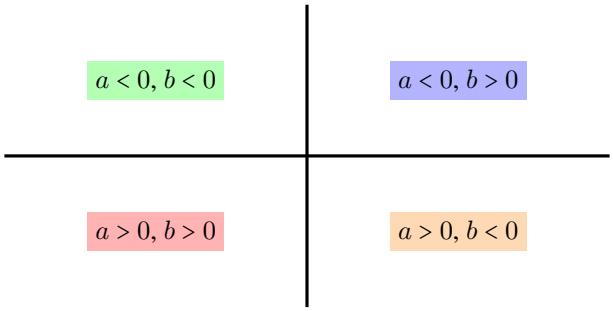


Figura 5.7: Ubicación del vértice de la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx$, con $a, b \neq 0$.

Como vimos en el Capítulo 4, las soluciones de esta ecuación pueden hallarse mediante la fórmula resolvente. También vimos que podía ocurrir que existan dos soluciones reales, una o ninguna. Gráficamente, estos casos significan que:

- **Dos soluciones:** la parábola interseca en dos puntos al eje x, que están ambos a igual distancia del eje de simetría.
- **Una solución:** el vértice de la parábola es de la forma $(h, 0)$, es decir, está sobre el eje x.
- **Ninguna solución:** La parábola se encuentra completamente por arriba o completamente por debajo del eje x. Esto ocurre cuando el vértice está por encima del eje x y las ramas abren hacia arriba ($a > 0$ y $V = (h, k)$ con $k > 0$), o cuando el vértice está debajo del eje x y las ramas abren hacia abajo ($a < 0$ y $V = (h, k)$ con $k < 0$).

Veamos esto hallando las raíces de las siguientes funciones cuadráticas, y representándolas gráficamente:

$$f(x) = x^2 - x - 2, \qquad g(x) = x^2 + 6x + 9, \qquad h(x) = -x^2 - 1.$$

Raíces de f. Aplicamos la resolvente con $a = 1$, $b = -1$ y $c = -2$:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2},$$

lo que nos da como resultado las raíces $x_1 = 2$ y $x_2 = -1$.

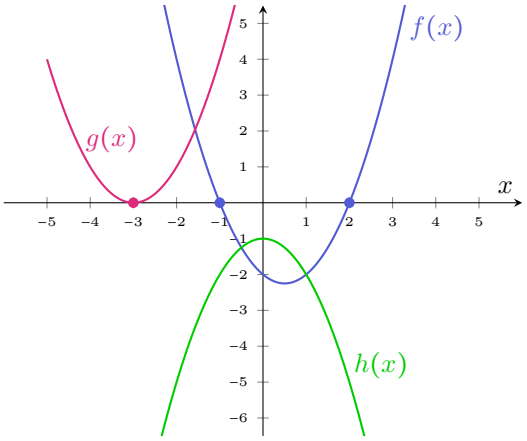
Raíces de g. Podemos aplicar la resolvente con $a = 1$, $b = 6$ y $c = 9$, o bien notar que el polinomio es un trinomio cuadrado perfecto: $g(x) = (x + 3)^2$, por lo que la única raíz será $x = -3$ (con multiplicidad 2).

Raíces de h. Debemos aplicar la resolvente con $a = -1$, $b = 0$ y $c = -1$:

$$x = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{0 \pm \sqrt{-4}}{-2},$$

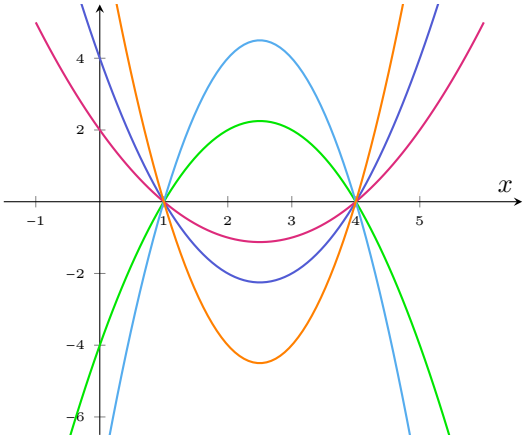
lo cual no tiene solución en los reales (el discriminante es negativo). Por lo tanto h no tiene raíces reales. Esto tiene sentido ya que $-x^2 - 1 < 0$ para todo valor de x, lo que significa que la gráfica de h se encuentra siempre debajo del eje x, y entonces nunca lo interseca.

La gráficas de estas tres funciones son las siguientes:



«

Conocer las raíces de una función cuadrática no es suficiente para determinar por completo su ecuación, pues existen infinitas parábolas que tienen las mismas raíces. Por ejemplo:



Sin embargo, sabemos que si un polinomio cuadrático $p(x) = ax^2 + bx + c$ tiene raíces reales x_1 y x_2, entonces puede factorizarse como

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Luego, conociendo las raíces de una función cuadrática, solamente falta encontrar a para determinar por completo su ecuación. Esto se logra conociendo además otro punto que pertenezca a la gráfica de la función (el vértice o cualquier otro), como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 196. **Determinando la función a partir de las raíces y un punto.** Supongamos que sabemos que las raíces de una función cuadrática f son $x_1 = 1$ y $x_2 = 4$. Determinar f sabiendo que su gráfica es una parábola que interseca al eje y en -4 (como la gráfica de color verde en el dibujo anterior).

Solución: Sabemos que $f(x) = a(x - 1)(x - 4)$, y solamente resta determinar a. Para ello, usaremos que el punto $(0, -4)$ satisface la ecuación $f(0) = -4$. Es decir

$$-4 = a(0 - 1)(0 - 4),$$

o equivalentemente $-4 = a \cdot 4$, por lo que $a = -1$. Luego, la función f es

$$f(x) = (-1)(x - 1)(x - 4) = -(x^2 - 4x - x + 4) = -x^2 + 5x - 4. \quad \ll$$

Aplicación: modelando problemas reales.

Muchas situaciones pueden modelarse mediante funciones cuadráticas. Veremos a continuación algunos ejemplos de ello, así como la importancia de saber interpretar estas funciones: su gráfico, sus valores extremos (máximo o mínimo), sus raíces y cualquier otra información que pueda brindarnos.

Ejemplo 197. **El máximo beneficio.** Supongamos que el beneficio (en miles de dólares) de una empresa aumenta cuando invierte en publicidad hasta un cierto límite, según la fórmula:

$$P(x) = 5000 + 1000x - 5x^2,$$

donde x es la cantidad (en miles de dólares) que la compañía gasta en publicidad. Hallar la cantidad que la empresa debe gastar en publicidad para maximizar sus ganancias, e indicar cuál sería dicho beneficio.

Solución: Completemos cuadrados en la expresión para P:

$$\begin{aligned} P(x) &= -5x^2 + 1000x + 5000 = -5(x^2 - 200x) + 5000 \\ &= -5(x^2 - 200x + 10000 - 10000) + 5000 \\ &= -5(x - 100)^2 + 55000. \end{aligned}$$

Luego, su representación gráfica es una parábola con ramas que abren hacia abajo y vértice $(100, 55000)$. Entonces este es un punto de máximo, lo que significa que el beneficio máximo se obtendrá al gastar 100000 dólares en publicidad, obteniendo una ganancia igual a 55000000 dólares. «

☞ Una forma alternativa de resolver el ejemplo anterior es usando la fórmula (5.5.1) dada en la página 228. Recordar dicha conclusión evita tener que completar cuadrados, ya que permite establecer que la función P alcanza un máximo en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1000}{2 \cdot (-5)} = 100,$$

y que dicho valor máximo es $P(100) = 55000$. Todos los ejemplos siguientes pueden resolverse también mediante la aplicación de este resultado. Sin embargo, optamos aquí por hacerlo mediante el método de completar cuadrados para llevar la función cuadrática dada a su forma canónica, ya que es la forma de hacerlo cuando no se recuerda la fórmula (5.5.1). Los ejercicios pueden resolverse de cualquiera de las dos formas, según el método que se prefiera.

Ejemplo 198. **La cantidad mínima de bacterias.** En un cierto rango de temperatura, la cantidad de bacterias en un alimento crece a medida que la temperatura aumenta. Supongamos que el número de bacterias en un alimento refrigerado viene dado por

$$N(t) = 20t^2 - 20t + 120,$$

donde t es la temperatura del alimento en grados Celsius. ¿A qué temperatura el número de bacterias es mínimo? ¿Cuál es la cantidad de bacterias cuando la temperatura del alimento es de 10 grados Celsius?

Solución: Completando cuadrados tenemos que

$$N(t) = 20t^2 - 20t + 120 = 20(t^2 - t) + 120$$

$$\begin{aligned} &= 20\left(t^2 - t + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\right) + 120 \\ &= 20\left(t^2 - t + \tfrac{1}{4}\right) - 5 + 120 \\ &= 20\left(t - \tfrac{1}{2}\right)^2 + 115. \end{aligned}$$

La gráfica de N es entonces una parábola cuyas ramas abren hacia arriba, y cuyo vértice es el punto $\left(\frac{1}{2}, 115\right)$. Este es entonces un punto de mínimo. Por lo tanto, la cantidad mínima de bacterias es de 115, y corresponde a una temperatura de 0.5 grados Celsius. Por otro lado, cuando la temperatura del alimento es de 10 grados Celsius, la cantidad de bacterias es

$$N(10) = 20 \cdot 10^2 - 20 \cdot 10 + 120 = 1920. \qquad \ll$$

Ejemplo 199. **La temperatura ideal.** En el agua, las condiciones térmicas para llevar a cabo una vida óptima depende de cada especie de pez. Para algunas especies, las temperaturas muy altas o muy bajas pueden conducir a una mortalidad elevada. Supongamos que la población de peces en una determinada parte del océano (en miles de peces) en función de la temperatura x del agua (en grados Celsius) está modelada por:

$$p(x) = -2x^2 + 40x - 72.$$

(a) Representar gráficamente esta función.

(b) Determinar la temperatura que maximiza la población de peces. ¿Cuál es esta cantidad máxima?

(c) Hallar el intervalo de temperaturas para el cual la población es de al menos 120000 peces.

(d) ¿Cuántos peces hay cuando la temperatura es de 7 grados Celsius? ¿Para qué otra temperatura se tiene la misma población?

(e) Indicar el intervalo de temperatura en el que hay población de peces.

Solución:

(a) Si en el eje x representamos la temperatura del agua en °C, y en el eje y la población (en miles de peces) en función de dicha temperatura, obtenemos la gráfica contenida en la Figura 5.8 (incluye datos para los incisos siguientes).

(b) Completando cuadrados tenemos que

$$p(x) = -2x^2 + 40x - 72 = -2(x^2 - 20x + 100 - 100) - 72 = -2(x-10)^2 + 128.$$

Luego, como puede corroborarse con el gráfico, la población máxima de peces es de 128000, que se alcanza cuando la temperatura del agua es de 10 °C.

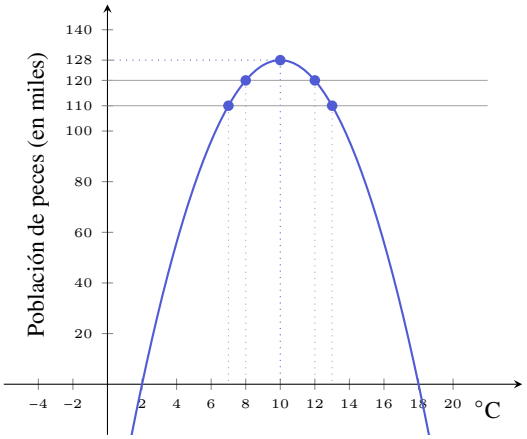


Figura 5.8: Población de peces en función de la temperatura del agua.

(c) Debemos resolver la inecuación $p(x) \geq 120$:

$$-2x^2 + 40x - 72 \geq 120 \iff -2x^2 + 40x - 192 \geq 0.$$

Aplicando la resolvente para factorizar el polinomio que aparece en la última desigualdad, obtenemos:

$$-2(x-8)(x-12) \geq 0.$$

Haremos una tabla de signos para resolver esta inecuación, que es equivalente a la pregunta planteada:

Factor \ Intervalo	$(-\infty, 8)$	$(8, 12)$	$(12, \infty)$
$x-8$	$-$	$+$	$+$
$x-12$	$-$	$-$	$+$
-2	$-$	$-$	$-$
$-2(x-8)(x-12)$	$-$	$+$	$-$

Esto significa que la población es de al menos 120000 peces cuando la temperatura pertenece al intervalo $[8, 12]$. Se agregó la recta $y = 120$ en el gráfico para comprobar este resultado.

☞ La tabla de signos es la forma analítica de resolverlo. Para hacerlo gráficamente podríamos haber trazado la parábola $y = -2x^2 + 40x - 192$, marcar sus raíces $x = 8$ y $x = 12$, y ver para qué valores queda por encima del eje x.

(d) La cantidad de peces (en miles) cuando la temperatura del agua es igual a 7 grados Celsius es

$$p(7) = -2 \cdot 7^2 + 40 \cdot 7 - 72 = 110.$$

Para determinar para qué otra temperatura la población es de 110000 peces, debemos resolver $p(x) = 110$:

$$p(x) = 110 \Leftrightarrow -2x^2 + 40x - 72 = 110 \Leftrightarrow -2x^2 + 40x - 182 = 0.$$

Aplicando la resolvente obtenemos $x_1 = 7$ y $x_2 = 13$. Luego, cuando la temperatura es de 13 grados Celsius, la población también es de 110000 peces. Agregamos además al gráfico la recta $y = 110$, para verificar lo obtenido.

(e) Debemos resolver $p(x) > 0$. Esto podemos hacerlo mediante una tabla de signos, pero también a partir de la gráfica realizada en el primer inciso, para concluir que hay población cuando la temperatura es mayor que 2°C y menor que 18°C. «

Ejemplo 200. **Altura de un objeto: tiro vertical.** Como vimos en el Ejemplo 172, la altura (en metros) de un objeto lanzado verticalmente en cada instante de tiempo (en segundos), está dada por

$$y(t) = -4.9t^2 + v_0 t + y_0,$$

siendo y_0 la altura desde la que se arroja el objeto, y v_0 la velocidad inicial con la que es arrojado ($v_0 > 0$ si el objeto se lanza hacia arriba, $v_0 < 0$ cuando es lanzado hacia abajo, y $v_0 = 0$ cuando se deja caer).

Hallar la altura máxima alcanzada por un objeto que fue lanzado verticalmente desde el suelo con una velocidad inicial $v_0 = 14.7$ m/s, y determinar el tiempo que demora en alcanzarla.

Solución: Puesto que el objeto se arroja desde el suelo, tenemos $y_0 = 0$. Entonces la altura (en metros) del objeto en cada instante t (en segundos) está dada por

$$y(t) = -4.9t^2 + 14.7t.$$

Completemos cuadrados:

$$\begin{aligned} y(t) = -4.9t^2 + 14.7t &= -4.9(t^2 - 3t) \\ &= -4.9\left(t^2 - 3t + \tfrac{9}{4}\right) + 4.9 \cdot \frac{9}{4} \\ &= -4.9\left(t - \tfrac{3}{2}\right)^2 + 11.025. \end{aligned}$$

Luego, la altura máxima alcanzada es de 11 metros aproximadamente, y la alcanza al segundo y medio de haber sido lanzado. «

NO CORRESPONDE

Ejemplo 201. **Altura de un objeto: tiro de proyectil.** Supongamos que un objeto ha sido lanzado formando un ángulo agudo con respecto a la horizontal (a diferencia del tiro vertical), de modo que su altura aproximada (en pies*, abreviado ft) está dada por

$$h(t) = -16t^2 + 64t + 190,$$

siendo t el tiempo en segundos luego de su lanzamiento.

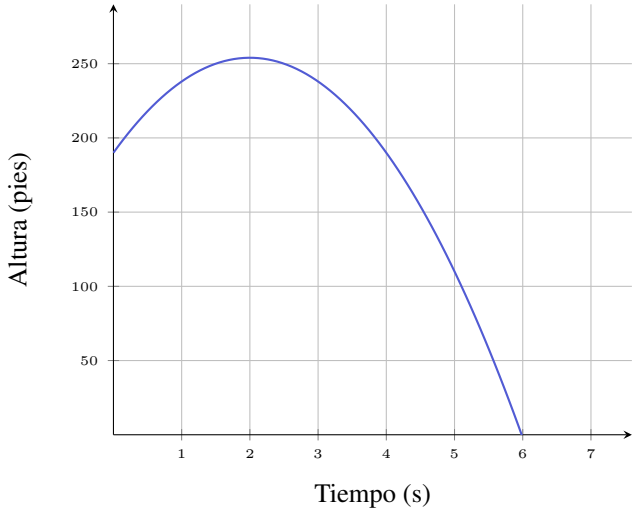
(a) ¿Desde qué altura fue arrojado el objeto? ¿En qué otro instante se encuentra a dicha altura?

(b) Indicar la altura del objeto luego de 1 segundo de haber sido arrojado.

(c) Hallar la altura máxima que alcanza el objeto, y el tiempo que demora en alcanzarla.

(d) Determinar cuánto tiempo le toma al objeto llegar al suelo.

Solución: Comencemos graficando la función que indica la altura del objeto en cada instante de tiempo:



(a) El objeto se lanza en el instante $t = 0$, por lo tanto la altura desde donde se lanza es $y(0) = 190$ pies. Buscamos ahora t tal que $y(t) = 190$, para lo cual debemos resolver la ecuación

$$-16t^2 + 64t + 190 = 190 \Leftrightarrow -16t^2 + 64t = 0 \Leftrightarrow -16t(t-4) = 0,$$

cuyas soluciones son $t = 0$ y $t = 4$. Es decir, a los 4 segundos luego de haber sido lanzado, el objeto vuelve a alcanzar la misma altura que cuando fue arrojado.

*Un pie equivale a 0.3048 metros, por lo que un metro equivale aproximadamente a 3.28 pies.

(b) La altura (en pies) del objeto al segundo de haber sido lanzado es

$$h(1) = -16 + 64 + 190 = 238.$$

(c) Completemos cuadrados:

$$\begin{aligned} h(t) &= -16t^2 + 64t + 190 = -16(t^2 - 4t) + 190 \\ &= -16(t^2 - 4t + 4 - 4) + 190 \\ &= -16(t^2 - 4t + 4) + 64 + 190 \\ &= -16(t-2)^2 + 254. \end{aligned}$$

Luego, la altura máxima alcanzada por el objeto es de 254 pies, a la cual llega a los 2 segundos de haber sido arrojado.

(d) Para determinar el tiempo que demora el objeto en llegar al suelo, debemos resolver $h(t) = 0$. Es decir:

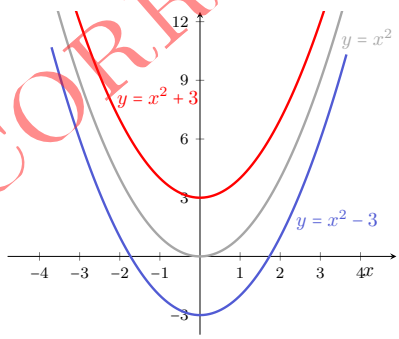
$$-16t^2 + 64t + 190 = 0.$$

Aplicando la resolvente obtenemos $t_1 \approx -1.98$ y $t_2 \approx 5.98$. Puesto que estamos hablando de tiempos, la solución negativa se descarta, así que el tiempo que demora en llegar al piso es de casi 6 segundos. «

Transformaciones de una función cuadrática.

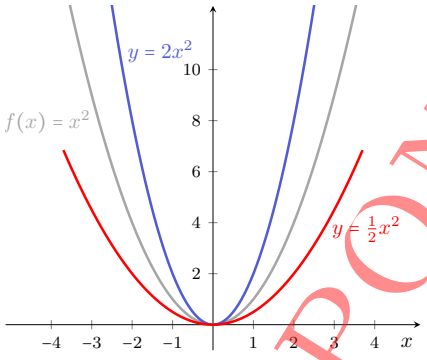
Analizaremos a continuación cómo ciertas **transformaciones de una función** modifican su gráfica. En forma general, suponiendo que conocemos la gráfica de una función cualquiera f, veremos cómo obtener la gráfica de las siguientes transformaciones: desplazamiento vertical y horizontal, reflexión con respecto a los ejes, y expansiones o contracciones verticales (y en los ejercicios se contempla el caso de expansiones o contracciones horizontales). Usaremos parábolas para ilustrar, pero vale para la gráfica de cualquier función, lo que resultará una herramienta fundamental en las Secciones 5.6 y 5.7.

Desplazamiento vertical. Para graficar $y = f(x) + k$ se desplaza la gráfica de f verticalmente k unidades hacia arriba si $k > 0$, o hacia abajo si $k < 0$.



NO CORRESPONDE

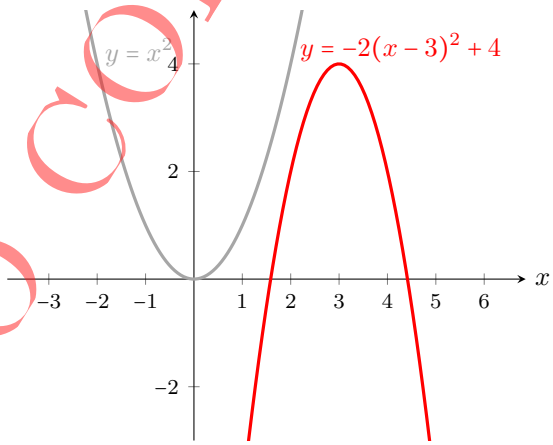
Expansión y contracción vertical. Para graficar $y = cf(x)$ se expande verticalmente con factor c la gráfica de f si $c > 1$, o se contrae si $0 < c < 1$.



Ejemplo 202. **Combinando transformaciones.** Todas las transformaciones anteriores pueden combinarse. Por ejemplo, la gráfica de la función

$$y = -2(x-3)^2 + 4$$

se puede obtener a partir de la gráfica de $y = x^2$ dilatando (o expandiendo) verticalmente la parábola matriz con factor 2 (quedando así un poco "más cerrada"), luego se la refleja respecto del eje x, y finalmente se la desplaza 3 unidades hacia la derecha y 4 unidades hacia arriba. El gráfico que se obtiene es el siguiente:



«

Ejercicios 5.5

1–10. Para cada una de las funciones dadas, resolver las siguientes consignas:

NO CORRESPONDE

(a) Hallar sus raíces (en caso de tenerlas).
(b) Hallar la intersección con el eje y (es decir, el valor de la función para $x = 0$).
(c) Expresarlas en forma canónica, y determinar el vértice y el eje de simetría.
(d) Bosquejar la gráfica a partir de la información anterior.
(e) Verificarlo mediante GeoGebra.

1. $y = -2x^2 - 4x + 6$

2. $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$

3. $y = x^2 - 4x + 7$

4. $y = 4x^2 + 8x + 3$

5. $y = x^2 + 2x - 2$

6. $y = x^2 + 4$

7. $y = x^2 - 4$

8. $y = 4x^2 + 12x + 8$

9. $y = x^2 + 2x$

10. $y = -x^2 - x + 6$

11. Hallar la función cuadrática cuyas raíces son $x_1 = -1$ y $x_2 = 3$, y cuya gráfica es una parábola con vértice en $(1, -2)$.

12. Hallar la función cuadrática cuyas raíces son $x_1 = 1$ y $x_2 = -3$, y cuya gráfica es una parábola con vértice en $(-1, -2)$.

13. Hallar la función cuadrática cuyas raíces son $x_1 = x_2 = 2$, y cuya gráfica pasa por el punto $(0, -12)$.

14. Hallar la función cuadrática cuyas raíces son $x_1 = -4$ y $x_2 = 1$, y cuya gráfica pasa por el punto $(3, 28)$.

15. Hallar la función cuadrática cuyas raíces son $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$, y cuya gráfica interseca al eje y en $(0, -6)$.

16. Hallar la función cuadrática cuyas raíces son $x_1 = x_2 = -3$, y cuya gráfica pasa por el punto $(-1, 16)$.

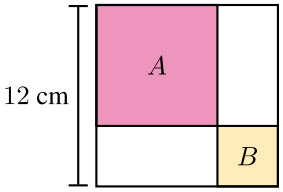
17. Expansión y contracción horizontal. En un mismo sistema, graficar las funciones

$$f(x) = (x-1)^2 + 3, \quad g(x) = (2x-1)^2 + 3 \quad \text{y} \quad h(x) = \left(\tfrac{1}{2}x - 1\right)^2 + 3.$$

Hallar una relación entre las expresiones para f y g, y luego entre f y h, para verificar que se satisface lo siguiente:

$y = f(cx)$ contrae horizontalmente con factor $\frac{1}{c}$ la gráfica de f si $c > 1$, o la dilata con dicho factor si $0 < c < 1$.

18. En un cuadrado de 12 cm de lado se trazan dos segmentos paralelos a los lados, de modo que queden determinados dos cuadrados A y B, como se indica en la siguiente figura.



(a) Si cada lado del cuadrado B mide 3 cm, hallar el área sombreada (es decir, la suma de las áreas de los cuadrados A y B).

(b) Si cada lado del cuadrado B mide x cm, hallar el área sombreada $a(x)$.

(c) ¿Existe un valor del lado de B tal que el área sombreada sea 70 cm^2?

(d) Hallar las medidas posibles para el lado del cuadrado B tal que el área sombreada sea igual a 80 cm^2.

(e) Hallar las medidas posibles para el lado del cuadrado B tal que el área sombreada sea menor que 80 cm^2.

(f) Hallar la medida del lado del cuadrado B tal que minimice el área sombreada, y determinar dicha área.

19. La altura de un rectángulo mide 3 unidades más que el doble de su ancho. Determinar las dimensiones para que el área sea 27 unidades al cuadrado.

20. La suma de los cuadrados de tres números naturales consecutivos es igual a 365. Determinar dichos números.

21. El largo de un terreno rectangular es de 10 metros más que su ancho. Si la superficie del mismo es 600 metros cuadrados, hallar las dimensiones del terreno.

22. Se dispone de 500 metros de alambre para rodear una región rectangular. Determinar las dimensiones de dicha región para que su área sea máxima.

23. Un fabricante de lámparas tiene un costo diario de producción (en pesos) dado por $C(x) = 600 - 6x + 0.2x^2$, siendo x la cantidad de unidades producidas en el día. Determinar la cantidad de lámparas que debe producir para minimizar los costos, y cuál es el importe del mismo.

24. La ganancia semanal (en miles de pesos) de una empresa que fabrica un determinado artículo, está dada por $G(x) = -0.5x^2 + 40x - 300$, siendo x la cantidad de artículos producidos y vendidos.

(a) ¿Qué ganancia obtiene si produce y vende 20 artículos semanales?
(b) Hallar las cantidades mínima y máxima de artículos semanales que debe producir y vender la empresa para no tener pérdidas.
(c) Hallar las cantidades mínima y máxima de artículos semanales que debe producir y vender la empresa para obtener una ganancia de al menos 300000 pesos.
(d) Determinar la cantidad de artículos que la empresa debe producir y vender semanalmente para maximizar su ganancia, e indicar cuál es dicha ganancia.

25. Hallar la altura máxima alcanzada por un objeto que fue lanzado verticalmente desde el suelo con una velocidad inicial $v_0 = 49$ m/s, y determinar el tiempo que demora en alcanzarla.

26. Una pelota es lanzada hacia arriba desde el nivel del suelo. Hallar el tiempo que demora la pelota en volver al suelo, sabiendo que la misma se encuentra a una altura de 20 metros en 2 segundos.

27. Para determinar la altura de una estatua, se deja caer una moneda desde la parte superior de la misma, y se toma el tiempo que demora en llegar al suelo. Si la moneda demora 2 segundos en llegar al suelo, ¿cuál es la altura de la estatua?

28. La altura aproximada de una pelota (en metros) está dada por

$$h(t) = -5t^2 + 45t + 180,$$

siendo t el tiempo en segundos luego de su lanzamiento.

(a) ¿Desde qué altura fue arrojada la pelota? ¿En qué otro instante se encuentra a dicha altura?
(b) Indicar la altura de la pelota luego de 3 segundos de haber sido arrojada.
(c) Hallar la altura máxima que alcanza la pelota, y el tiempo que demora en alcanzarla.
(d) Determinar cuánto tiempo le toma a la pelota llegar al suelo.
(e) Determinar el intervalo de tiempo luego de su lanzamiento, en el que la altura de la pelota supera los 250 metros.

29. Se lanza un proyectil desde una torre, y su altura (en pies) con respecto al suelo está dada por

$$h(t) = 1320 + 45t - 15t^2,$$

siendo t la cantidad de segundos luego de su lanzamiento.

(a) Determinar cuál es y cuándo alcanza su altura máxima.
(b) Hallar el tiempo que demora en llegar al suelo.
(c) Indicar la altura de la torre, y en qué momento vuelve a estar el proyectil a dicha altura.

5.6. Función exponencial

Las funciones exponenciales aparecen modelando numerosas situaciones, desde fenómenos de la naturaleza (como el número de bacterias que se reproducen por fisión binaria, la cantidad de miembros de poblaciones*, la desintegración radiactiva, o la concentración de medicamentos en sangre, entre otros) hasta problemas pertenecientes al campo de la ciencias económicas (como en las fórmulas de interés compuesto), como veremos en los ejemplos. Una **función exponencial** es una de la forma

$$f(x) = a^x,$$

siendo $a > 0$ y $a \neq 1$, o una transformación de ella (ver Ejemplo 204). Es decir, es una función en la que la variable aparece en el exponente, y la base a es positiva y distinta de 1 (esta última condición es solamente porque $1^x = 1$ para cualquier x, y entonces se obtendría una función constante). Por ejemplo, si $a = 2$ tenemos

$$f(x) = 2^x.$$

Entonces, de la definición de potencia dada en el Capítulo 2, sabemos calcular por ejemplo:

$$f(3) = 2^3 = 8, \quad f(-1) = 2^{-1} = \tfrac{1}{2}, \quad f\left(\tfrac{3}{2}\right) = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{8}.$$

También, en la página 28 mencionamos que para exponentes irracionales consideraremos el valor aproximado que arroja la calculadora. Entonces,

$$f(\pi) = 2^\pi \approx 8.82497782708.$$

Por lo tanto, el dominio de f es el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.

Al igual que con todas las funciones estudiadas hasta ahora, comenzaremos realizando una tabla de valores para esbozar la gráfica de una función exponencial.

Ejemplo 203. **Esbozando el gráfico de funciones exponenciales.** Analizaremos en este ejemplo las funciones dadas por

$$f(x) = 2^x, \qquad g(x) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^x.$$

Las tablas de valores para estas funciones son las siguientes:

*Una población es un grupo de organismos de la misma especie, que habitan un determinado lugar, en el cual utilizan recursos y se reproducen.

NO CORRESPONDE

21. Completar la siguiente tabla, en la que I denota la intensidad del sonido en W/m^2 y N denota el nivel de intensidad en dB.

Fuente de sonido	I	N
Despertador	10^{-4}	
Avión despegando	10	
Camión de basura		100
Aspiradora		70
Bocina	0.1	
Sonido de fondo en un campo		30

22. Completar el siguiente cuadro, donde m denota la magnitud aparente, M la absoluta y d la distancia a la Tierra medida en pársecs.

Objeto astronómico	m	M	d
Omega Centauri	3.7		5212
Betelgeuse	0.42	-6.05	
Vega		0.58	7.76
Antares	1		180
Estrella polar	1.97		132

5.8. Análisis de funciones a partir de la gráfica

Al comienzo de este capítulo aprendimos cómo interpretar el gráfico de una función en diferentes problemas. Además, cuando hablamos de funciones afines analizamos el efecto de la pendiente en la gráfica correspondiente, y utilizamos expresiones del tipo "sube" (cuando la pendiente es positiva) o "baja" (cuando es negativa). Otras veces mencionamos frases como "estar por arriba" o "por debajo" del eje x para describir la gráfica de una función, o parte de ella. Todas estas expresiones informales tienen definiciones precisas en matemática, las cuales vamos a presentar y analizar a continuación.

Conjunto de positividad, negatividad y ceros. Sea f una función con dominio A. El **conjunto de positividad**, el cual denotaremos C^+ o $C^+(f)$ cuando sea necesario indicar a qué función nos referimos, es el subconjunto del dominio cuyas imágenes son positivas. En símbolos:

$$C^+ = \{x \in A : f(x) > 0\}.$$

Es decir, el conjunto C^+ está formado por las abscisas de los puntos de la gráfica de f cuyas ordenadas son positivas. De manera informal, en C^+ colec-

NO CORRESPONDE
OPCIONAL

cionamos todos los valores del dominio para los cuales la gráfica de f queda "por arriba" del eje x.

De forma análoga se define el **conjunto de negatividad** de f, el cual denotaremos C^- o $C^-(f)$ de ser necesario, como el subconjunto del dominio cuyas imágenes son negativas. En símbolos:

$$C^- = \{x \in A : f(x) < 0\}.$$

Así, el conjunto C^- está formado por las abscisas de los puntos de la gráfica de f cuyas ordenadas son negativas, lo que informalmente se expresa como la colección de todos los valores del dominio para los cuales la gráfica de f queda "por debajo" del eje x.

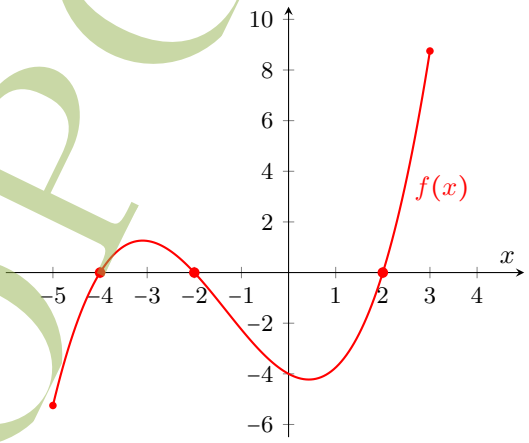
Finalmente, el **conjunto de ceros** de f se denota C^0, o $C^0(f)$, y es el formado por todas sus raíces. Es decir,

$$C^0 = \{x \in A : f(x) = 0\}.$$

Los valores en C^0 son las abscisas de los puntos donde la gráfica de f "corta" al eje x.

En los Ejemplos 149 y 150 vimos cómo hallar estos conjuntos en el caso de que f sea una función polinómica, y los utilizamos para esbozar su gráfica. Ilustramos a continuación el proceso inverso: cómo hallar dichos conjuntos observando la gráfica de una función.

Ejemplo 228. **Conjuntos de positividad, negatividad y ceros de una función.** Hallar los conjuntos C^+, C^- y C^0 correspondientes a la función f, cuyo dominio es $A = [-5, 3]$ y su gráfica es la siguiente:



OPCIONAL

Solución: Comencemos determinando el conjunto C^0 formado por las raíces de f. Del gráfico se observa, claramente, que

$$C^0 = \{-4, -2, 2\},$$

ya que estas son las abscisas de los puntos en los que la gráfica de f interseca al eje x. Tengamos presentes estos valores para no incluirlos en ninguno de los conjuntos restantes. Para hallar C^+ debemos observar el gráfico y determinar todos los valores del intervalo $[-5, 3]$ cuya imagen es positiva. Es decir, debemos hallar los valores del dominio para los que la gráfica de f queda por encima del eje x. En este caso, tenemos que

$$C^+ = (-4, -2) \cup (2, 3].$$

Observar que utilizamos paréntesis en lugar de corchetes para no incluir en C^+ a los valores que pertenecen a C^0. De la misma forma, para determinar C^- observamos los valores del dominio para los cuales la gráfica queda por debajo del eje x. En este caso:

$$C^- = [-5, -4) \cup (-2, 2).$$

Nuevamente hemos tenido cuidado de no incluir en C^- los valores correspondientes a las raíces. «

☞ Notar que siempre debe ocurrir que

$$C^+ \cup C^- \cup C^0 = \mathrm{Dom}(f).$$

Es decir, la unión de los tres conjuntos presentados debe dar como resultado todo el conjunto A, que es el dominio de f. Esto es claro ya que la imagen de cualquier valor x en el dominio tiene solamente tres opciones posibles: o bien es positiva, o bien es negativa, o bien es cero. Además, para cada x en el dominio, de estas opciones puede ocurrir solo una, por lo que estos tres conjuntos son "disjuntos dos a dos", lo que significa que la intersección de cualquier par de ellos da como resultado el conjunto vacío:

$$C^+ \cap C^- = \varnothing, \qquad C^+ \cap C^0 = \varnothing, \qquad C^- \cap C^0 = \varnothing.$$

Es importante tener en cuenta estos hechos y chequear, en cada caso, que estos tres conjuntos cubran todo el dominio sin "solaparse", ni siquiera en un punto.

Ejemplo 229. Hallar los conjuntos C^+, C^- y C^0 correspondientes a la función g, cuyo dominio es $\mathbb{R}$ y su gráfica es contenida en la Figura 5.12.

Observación: cuando el dominio sea $\mathbb{R}$ supondremos que la gráfica continúa fuera de la zona visible con el mismo "comportamiento" que en la parte ilustrada.

OPCIONAL

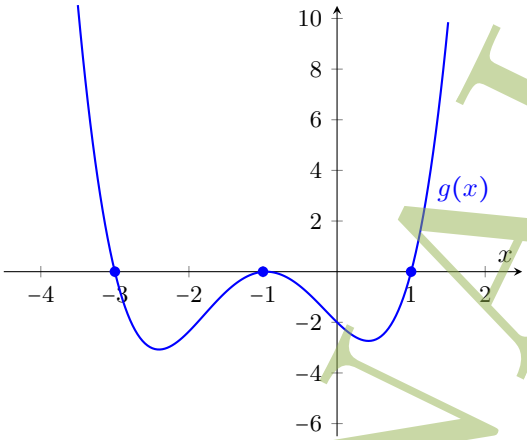


Figura 5.12: Representación gráfica de g.

Solución: Hallemos primero el conjunto C^0 formado por las raíces de g. En este caso, observando el gráfico vemos que

$$C^0 = \{-3, -1, 1\}.$$

Para hallar C^+ debemos observar el gráfico y determinar todos los valores reales cuya imagen es positiva, es decir, para los que la gráfica de g queda por encima del eje x. Estos valores conforman el conjunto

$$C^+ = (-\infty, -3) \cup (1, \infty).$$

En este caso hemos hecho uso de la observación realizada antes sobre el comportamiento de la función en la parte que no vemos. Además, hemos excluido los valores $x = -3$ y $x = 1$ porque en ambos casos g se anula.

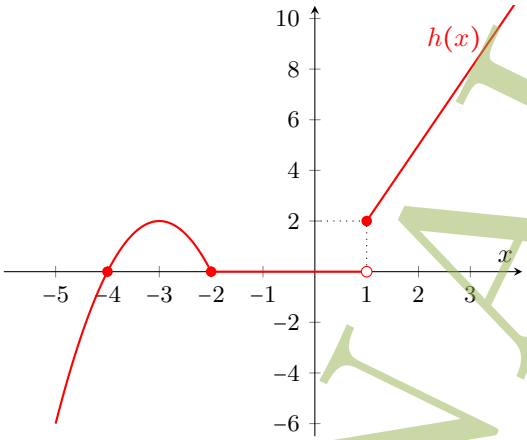
De la misma forma, para determinar C^- observamos los valores del dominio cuya imagen es negativa, es decir, donde la gráfica queda por debajo del eje x. En este caso:

$$C^- = (-3, -1) \cup (-1, 1), \qquad \text{o bien} \qquad C^- = (-3, 1) - \{-1\}.$$

Notar que tuvimos que quitar el valor $x = -1$ ya que es una raíz de g, por lo que el intervalo $(-3, 1)$ queda "perforado" allí. «

Ejemplo 230. Hallar los conjuntos C^+, C^- y C^0 correspondientes a la función h, cuyo dominio es $\mathbb{R}$ y su gráfica es la siguiente:

OPCIONAL



Observación: cuando una función tiene un "salto" en su gráfica, es necesario indicar de alguna forma qué valor toma la función allí. Para eso se suelen utilizar círculos pintados o vacíos, para denotar si la función toma o no un valor, respectivamente. Para entender esto, en la gráfica de h se utiliza un círculo pintado para indicar que $h(1) = 2$, y un círculo sin pintar para indicar que $h(1) \neq 0$.

Solución: Comencemos, como antes, determinando el conjunto C^0 formado por las raíces de h. En este caso, observando el gráfico vemos que, a diferencia de los ejemplos anteriores, C^0 no contiene una cantidad finita de valores, sino que está formado por un elemento más un intervalo en el cual la función es constantemente cero. Más precisamente:

$$C^0 = \{-4\} \cup [-2, 1),$$

donde no incluimos el valor $x = 1$ debido al círculo vacío en el gráfico. El conjunto de positividad de h, siguiendo con la suposición hecha en la observación de la página 280 sobre funciones con dominio en $\mathbb{R}$, es

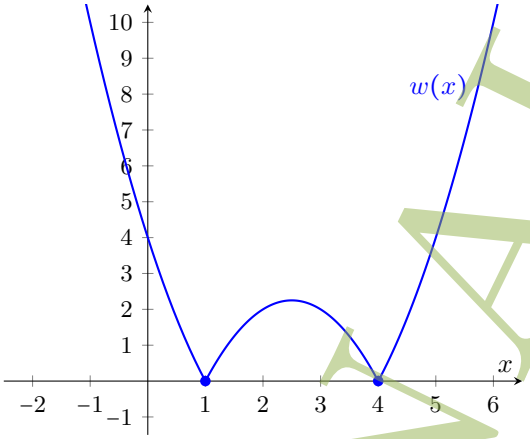
$$C^+ = (-4, -2) \cup [1, \infty),$$

mientras que el de negatividad es

$$C^- = (-\infty, -4).$$ «

Ejemplo 231. Hallar los conjuntos C^+, C^- y C^0 correspondientes a la función w, cuyo dominio es $\mathbb{R}$ y su gráfica es la siguiente:

OPCIONAL



Solución: En este caso el conjunto de las raíces de w contiene solamente dos elementos:

$$C^0 = \{1, 4\}.$$

Para el resto de los valores el gráfico de la función queda por encima del eje horizontal, por lo que la función es positiva allí, es decir,

$$C^+ = \mathbb{R} - \{1, 4\}, \qquad \text{o bien} \qquad C^+ = (-\infty, 1) \cup (1, 4) \cup (4, \infty).$$

Finalmente, como la gráfica de w nunca queda por debajo del eje x, la función no toma valores negativos. Es decir,

$$C^- = \varnothing.$$ «

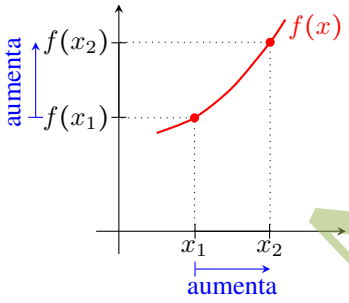
Funciones crecientes, decrecientes y constantes. Como mencionamos antes, si al observar la gráfica de una función decimos que "sube", "baja" o permanece constante cuando la recorremos de izquierda a derecha como si fuera el gráfico de un camino, estamos usando expresiones que tienen una definición precisa en términos matemáticos. Vamos a analizar cada uno de estos aspectos para la gráfica de una función f con dominio A.

Se dice que f **crece** o es **creciente** en un subconjunto I contenido en el dominio si, para todo $x_1, x_2 \in I$, se cumple que:

$$\text{si } x_1 < x_2 \text{ entonces } f(x_1) < f(x_2).$$

En palabras, una función es creciente cuando, a medida que el valor de la variable independiente x aumenta, el valor de la función también aumenta. Gráficamente, esto se ilustra como:

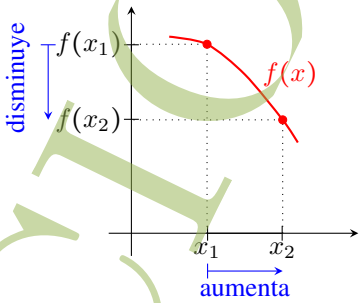
OPCIONAL



Similarmente, se dice que f **decrece** o es **decreciente** en un subconjunto I contenido en el dominio si, para todo $x_1, x_2 \in I$, se cumple que:

$$\text{si } x_1 < x_2 \text{ entonces } f(x_1) > f(x_2).$$

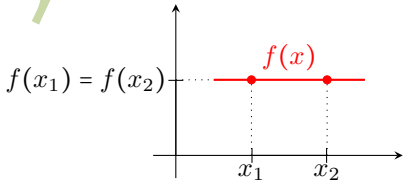
Esto significa que una función es decreciente cuando, a medida que el valor de la variable independiente x crece, el valor de la función disminuye. Gráficamente, esto se ilustra como:



Finalmente, se dice que f es **constante** en un subconjunto I contenido en el dominio si se cumple que:

$$f(x_1) = f(x_2) \text{ para todo } x_1, x_2 \in I.$$

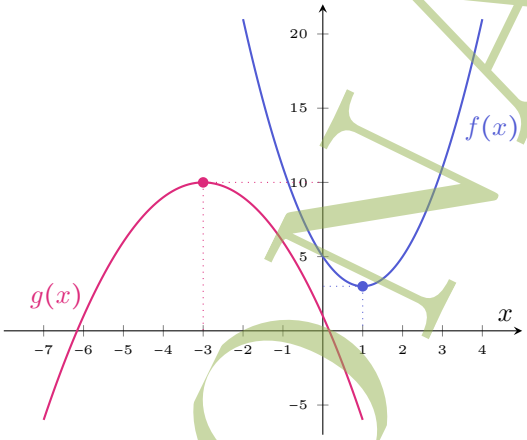
Esto significa que la función no cambia de valor aunque la variable independiente cambie. Gráficamente el aspecto es el siguiente:



ORIGINAL

En particular, buscaremos *intervalos* en los que una función crece, decrece o es constante.

Ejemplo 232. **Intervalos donde una función crece o decrece.** Considerar las funciones f y g cuyas gráficas corresponden a las siguientes parábolas. Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de cada una, considerando a $\mathbb{R}$ como el dominio en ambos casos.



Solución: Comencemos analizando la función f. Si recorremos la curva de izquierda a derecha, podemos observar que la misma "baja" hasta llegar al vértice, a partir del cual comienza a "subir". Así, tenemos que los intervalos de decrecimiento y crecimiento de f son

$$I_{\text{d}} = (-\infty, 1], \qquad I_{\text{c}} = [1, \infty),$$

respectivamente. Para la gráfica de g ocurre exactamente al revés: asciende hasta llegar al vértice y luego comienza a descender. Así, tenemos que:

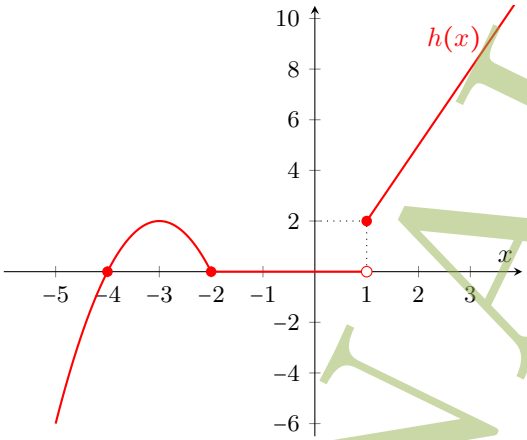
$$I_{\text{c}} = (-\infty, -3], \qquad I_{\text{d}} = [-3, \infty).$$

Notar que no hay ningún intervalo en el que alguna de las dos funciones permanezca constante. «

☞ Observar que, a diferencia de los conjuntos de positividad, negatividad y ceros, los intervalos donde una función crece, decrece o es constante pueden tener intersección no vacía. Sin embargo, el "solapamiento" no puede ser más que los puntos extremos de los intervalos. Además, el hecho de que los intervalos involucrados incluyan o no a los extremos depende de cada función, como puede verse en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 233. Hallar los intervalos donde la función h considerada en el Ejemplo 230 crece, decrece o es constante.

PROHIBIDO



Solución: En este caso, al recorrer la gráfica de izquierda a derecha, podemos observar que en dos momentos la curva asciende. Precisamente, los intervalos donde h crece son

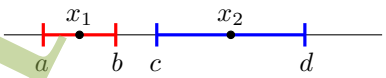
$$(-\infty, -3] \quad \text{y} \quad [1, \infty).$$

De la misma forma, observamos que h decrece solamente en un intervalo, el cual es $[-3, -2]$. Finalmente, vemos que h permanece constantemente igual a cero en el intervalo $[-2, 1)$. En este caso no podemos incluir el valor $x = 1$ allí, pues $h(1) = 2$. «

Con frecuencia se observa que para indicar, por ejemplo, el conjunto de crecimiento de una función f que crece en dos o más intervalos disjuntos, se utiliza el símbolo de unión entre ellos:

$$I = [a, b] \cup [c, d].$$

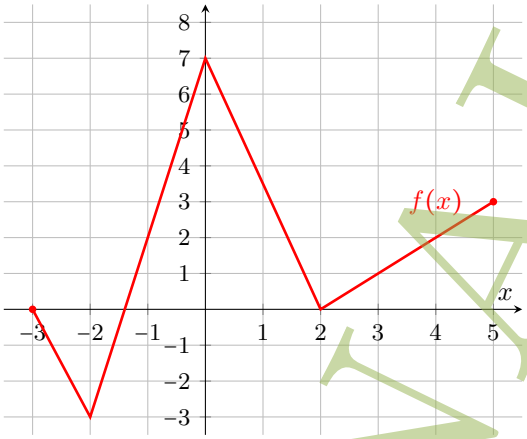
Esto, en general, resulta **incorrecto**. Para que sea correcto, por definición de función creciente, debe ocurrir que $f(x_1) < f(x_2)$ para todo x_1 y x_2 en I tales que $x_1 < x_2$. En particular, esto debe valer si se toma un punto en cada intervalo:



Esto no siempre ocurre, como puede verse en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 234. **Un error frecuente.** Hallar los intervalos donde la función f, representada en la gráfica siguiente, crece, decrece o permanece constante. Considerar como su dominio al intervalo $[-3, 5]$.

OPCIONAL



Solución: Es claro, observando donde la gráfica "sube", que la función f crece en los intervalos $[-2,0]$ y $[2,5]$. Notar que resulta **incorrecto** afirmar que f es creciente en

$$I_c = [-2,0] \cup [2,5], \quad ✗$$

ya que basta tomar $x_1 = -1$ y $x_2 = 3$, ambos pertenecientes a I_c y con $x_1 < x_2$, para observar que $f(-1) = 2$ no es menor que $f(3) = 1$. Lo correcto es decir que f crece en los intervalos

$$[-2,0] \quad \text{y} \quad [2,5]. \quad ✓$$

De la misma forma, resulta incorrecto utilizar el símbolo unión para indicar el conjunto de decrecimiento de f:

$$I_d = [-3,-2] \cup [0,2], \quad ✗$$

pues basta con tomar x_1 cualquier valor en $[-3,-2]$ y x_2 cualquiera en $[0,2]$ para comprobar que $f(x_2)$ no es más chica que $f(x_1)$. Lo correcto, entonces, es decir que f decrece en los intervalos

$$[-3,-2] \quad \text{y} \quad [0,2]. \quad ✓$$

La función no permanece constante en ningún intervalo. «

Para ilustrar coloquialmente el error cometido al usar la unión de intervalos para indicar los conjuntos donde una función crece, decrece o permanece constante, consideremos la que indica la cantidad de dinero en nuestra cuenta bancaria al final de cada día. Supongamos que el día 1 de cada mes se deposita en ella un sueldo fijo, y que vamos gastando dinero cada día hasta llegar a fin de mes. En otras palabras, la cantidad de dinero en la cuenta *decrece* a lo largo de

OPCIONAL

cada mes. Sin embargo, no es verdad que decrece a lo largo de todo el año, pues cada día que se deposita el sueldo hay más dinero que el día anterior. Aquí cada mes representa un intervalo, mientras que el año es la unión de ellos.

Veamos otro ejemplo que ilustra el problema de utilizar la unión de intervalos para describir estos conjuntos.

Ejemplo 235. Hallar los intervalos donde la función g crece, decrece o es constante. Considerar el intervalo $[0, 8]$ como su dominio.



Solución: El aspecto de la gráfica de g es el de una escalera que sube. Cada uno de los "escalones" corresponde a un intervalo en el que la función es constante. Así, g es constante en los intervalos

$$[1, 2], \quad [4, 6] \quad \text{y} \quad [7, 8].$$

Notar que, como antes, resulta incorrecto decir que g es constante en

$$[1, 2] \cup [4, 6] \cup [7, 8], \quad \text{✗}$$

ya que toma distintos valores en cada uno de los intervalos. Así, por ejemplo, $g(2) \neq g(5)$. En el resto de los intervalos la función es creciente:

$$[0, 1], \quad [2, 4] \quad \text{y} \quad [6, 7].$$

Finalmente, como observamos, g no decrece en ningún intervalo. «

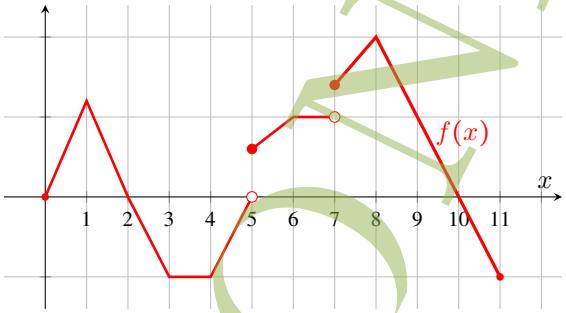
☞ En el ejemplo anterior, puesto que g nunca decrece, se podría utilizar la unión de los tres últimos intervalos para indicar el conjunto donde g crece (en realidad, donde no decrece, ya que los extremos siguen presentando problemas en la desigualdad estricta de la definición de crecimiento). Así, para evitar respuestas

OPCIONAL

falsas, **es recomendable no utilizar esta operación entre conjuntos** para establecer los intervalos donde una función crece, decrece o es constante, y enunciar cada uno por separado.

Finalizamos la sección con algunos ejemplos en los que analizamos todos los conjuntos trabajados previamente.

Ejemplo 236. Considerar la función f cuyo dominio es el intervalo $[0, 11]$ representada en la gráfica siguiente. Hallar el conjunto de ceros, de positividad, de negatividad, y los intervalos de crecimiento, de decrecimiento y en los que la función es constante.



Solución: Comencemos hallando el conjunto de raíces de f, que es donde la gráfica interseca al eje x. Notar que $f(5) \neq 0$, ya que la gráfica está "perforada" allí. Entonces $x = 5$ no es una raíz de f. Así,

$$C^0 = \{0, 2, 10\}.$$

Observando dónde la gráfica queda por encima o por debajo del eje x, tenemos que

$$C^+ = (0, 2) \cup [5, 10) \quad \text{y} \quad C^- = (2, 5) \cup (10, 11].$$

Los intervalos en los que f crece son

$$[0, 1], \quad [4, 6] \quad \text{y} \quad [7, 8],$$

mientras que f decrece en

$$[1, 3] \quad \text{y} \quad [8, 11].$$

Finalmente, podemos ver que los intervalos donde es constante son

$$[3, 4] \quad \text{y} \quad [6, 7).$$

«

OPCIONAL

Ejemplo 237. **Algunas funciones conocidas.**

Función afín. Para una función afín $f(x) = ax + b$, con a distinto de 0, tendremos siempre que $C^0 = \left\{\frac{-b}{a}\right\}$. El resto dependerá del signo de a:

$a > 0$ La función será siempre creciente, y será negativa para los valores menores que la raíz, y positiva en los mayores:

$$C^- = \left(-\infty, \tfrac{-b}{a}\right), \qquad C^+ = \left(\tfrac{-b}{a}, \infty\right).$$

$a < 0$ La función será siempre decreciente, y será positiva para los valores menores que la raíz, y negativa en los mayores:

$$C^+ = \left(-\infty, \tfrac{-b}{a}\right), \qquad C^- = \left(\tfrac{-b}{a}, \infty\right).$$

Función exponencial. La función $f(x) = a^x$ es siempre positiva para cualquier valor posible de a (recordemos que $a > 0$ y $a \neq 1$). Así,

$$C^+ = \mathbb{R}, \qquad C^0 = \varnothing, \qquad C^- = \varnothing.$$

Además, cuando $a > 1$ la función es siempre creciente, mientras que es siempre decreciente cuando $0 < a < 1$.

Función logarítmica. Para la función $f(x) = \log_a(x)$, con $a > 0$ y $a \neq 1$, tendremos siempre que $C^0 = \{1\}$. El resto dependerá del valor de a:

$a > 1$ La función resulta siempre creciente, siendo negativa para los valores del dominio menores que 1, y positiva para los mayores:

$$C^- = (0, 1), \qquad C^+ = (1, \infty).$$

$0 < a < 1$ La función resulta siempre decreciente, siendo positiva para los valores del dominio menores que 1, y negativa para los mayores:

$$C^+ = (0, 1), \qquad C^- = (1, \infty).$$ «

Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas. En la Sección 5.1 vimos de qué manera determinar si una gráfica corresponde o no a la de una función. Para ello, nos desplazamos por cada punto del dominio (eje horizontal) y trazamos rectas verticales imaginarias en cada uno de ellos. Para que sea la gráfica de una función, cada una de estas líneas debe cortar una y solo una vez a la curva, lo que garantiza la existencia y unicidad de imagen.

Veremos ahora que el trazado de rectas horizontales permite determinar si la función satisface ciertas propiedades, las que definimos a continuación.

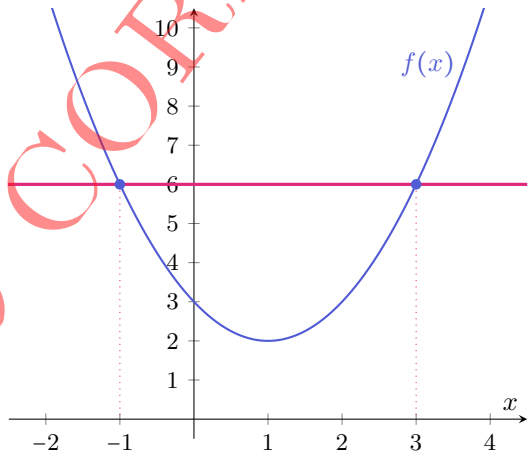
OPCIONAL
NO CORRESPONDE

Las funciones biyectivas son de gran importancia en matemática. Una de las razones es que toda función biyectiva posee inversa: si $f : A \to B$ es biyectiva, entonces existe una función $g : B \to A$ tal que $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ (en los Ejercicios 11 a 14 de la Sección 5.7, página 11, se pueden trabajar algunos ejemplos sobre esto).

Todo lo trabajado en esta sección a partir de las gráficas es posible determinarlo analíticamente conociendo la regla que define a la función representada, y las herramientas de cálculo adecuadas. Esta es, de hecho, la forma precisa de obtener los valores correctos. El objetivo de esta sección es, solamente, utilizar lo visual como recurso para incorporar los conceptos de modo que, cuando sea posible hacerlo analíticamente, lo gráfico permita corroborar o anticipar los resultados. Por ejemplo, resolver la ecuación cuadrática

$$x^2 - 2x + 3 = 6$$

equivale a encontrar las preimágenes de la función $f(x) = x^2 - 2x + 3$ para el valor $y = 6$. Esbozando el gráfico de f y de la recta horizontal $y = 6$ podemos ver si los valores hallados analíticamente para las soluciones de la ecuación tienen o no sentido, o anticipar cuántas serán y qué valores aproximados tendrán.



Es importante señalar que lo gráfico **no** es una justificación matemática correcta cuando se dispone de la forma exacta de resolver un problema, ya que no tiene precisión. Por ejemplo, supongamos que se nos pide comprobar si el punto $P = (5, 6)$ pertenece a la recta de ecuación $y = x + \frac{9}{10}$. La gráfica de la recta y del punto pueden verse en la Figura 5.15.

Observando el gráfico, y dependiendo del grosor del trazo y la precisión en la escala utilizados, uno podría concluir que el punto P pertenece a la recta, o que

NO CORRESPONDE

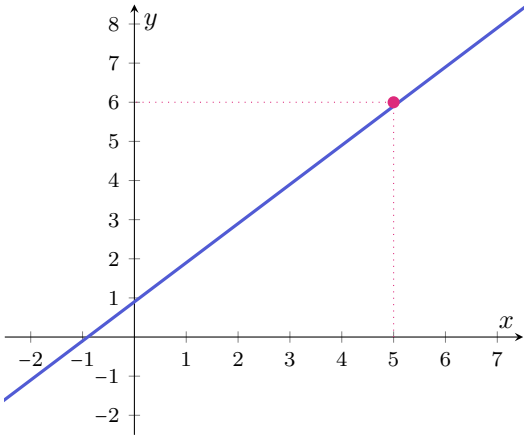


Figura 5.15: Gráfico de $y = x + \frac{9}{10}$ y $P = (5, 6)$.

la raíz es $x = -1$ o que la intersección con el eje vertical es en $y = 1$. **Todas estas conclusiones son falsas**, como puede verificarse analíticamente: P no pertenece a la recta porque

$$5 + \frac{9}{10} \neq 6,$$

la raíz es $x = -\frac{9}{10}$ y la intersección con el eje vertical es en $y = \frac{9}{10}$. La preimagen de $y = 6$ se obtiene resolviendo

$$6 = x + \frac{9}{10},$$

lo que da como resultado $x = \frac{51}{10} = 5.1$. A partir del valor correcto que obtuvimos para la raíz, tenemos que los conjuntos de positividad y negatividad para esta función son, respectivamente,

$$C^+ = \left(-\tfrac{9}{10}, \infty\right) \qquad \text{y} \qquad C^- = \left(-\infty, -\tfrac{9}{10}\right).$$

Por lo tanto, cuando solamente se disponga del gráfico como en la mayoría de los casos en esta sección, se entiende que los valores hallados pueden resultar aproximaciones de lo real. Este es el caso, por ejemplo, de las preimágenes o ceros de una función.

Ejercicios 5.8

1–4. En cada uno de los siguientes casos hallar, si existen, el conjunto de ceros, de positividad, de negatividad, y los intervalos de crecimiento, de decrecimiento y en los que la función es constante. Recordar que cuando el dominio es $\mathbb{R}$ supondremos que la gráfica continúa fuera de la zona visible con el mismo "comportamiento" que en la parte ilustrada.

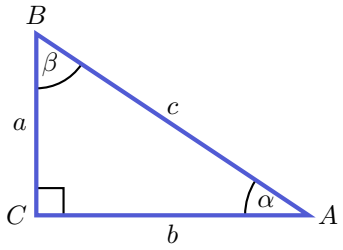
NO CORRESPONDE

Capítulo 6

Resolución de triángulos rectángulos

6.1. Razones trigonométricas

En ciertos problemas a veces es necesario tomar medidas en lugares complicados o incluso inaccesibles, por lo que resulta necesario determinarlas de otra forma. Es entonces donde aparece la *trigonometría*, que es una rama de la matemática que se ocupa de estudiar las relaciones entre los lados y ángulos de un triángulo. En este libro nos ocuparemos solamente de problemas que involucren **triángulos rectángulos**, es decir, un triángulo con un ángulo recto (el cual es uno que mide $90°$), como se muestra en la siguiente figura:



Puesto que la suma de los ángulos interiores de todo triángulo debe ser igual a $180°$, en este caso tenemos que $\alpha + \beta = 90°$. Es decir, α y β son **ángulos complementarios**. Esto implica que son ambos **agudos**, pues cada uno debe medir menos de $90°$.

Se denomina **hipotenusa** al lado mayor del triángulo, que es el lado opuesto al ángulo recto (indicado con la letra c en el dibujo de arriba). Se llaman **catetos** a los dos lados restantes (indicados con las letras a y b en el dibujo).

El **teorema de Pitágoras** establece que en todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Es decir, según la notación de la figura anterior,

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Este teorema nos permite determinar un lado desconocido de un triángulo rectángulo, conociendo la medida de los otros dos:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad a = \sqrt{c^2 - b^2}, \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

Ejemplo 240. **Aplicando el teorema de Pitágoras.** Supongamos que los catetos de un triángulo rectángulo miden 2 y 3 unidades. Entonces podemos determinar la longitud de la hipotenusa mediante el teorema de Pitágoras como:

$$c = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

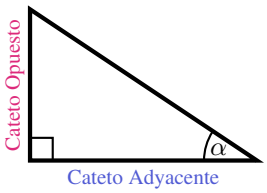
Luego, la hipotenusa mide $\sqrt{13}$ unidades. «

Ejemplo 241. Sabiendo que la hipotenusa de un triángulo mide 5 unidades y uno de los catetos mide 3, entonces la longitud del cateto restante debe satisfacer

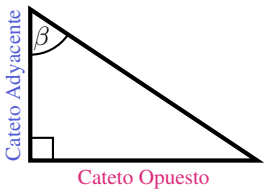
$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4.$$

Luego, el cateto restante mide 4 unidades. «

Para poder definir las razones trigonométricas para un ángulo agudo, que usaremos para resolver los problemas, necesitamos primero especificar los nombres de los catetos. Este nombre dependerá del ángulo que estemos considerando: el **cateto opuesto** es el lado opuesto a dicho ángulo, mientras que el **cateto adyacente** es el lado adyacente al ángulo que no es la hipotenusa. Es decir, que el nombre de los catetos varía si cambiamos el ángulo agudo de referencia, como se ilustra en la siguiente figura.



Catetos respecto de α



Catetos respecto de β

Con esta terminología podemos definir las **razones trigonométricas** correspondientes a un ángulo agudo α de un triángulo rectángulo. Esto es simplemente ponerle un nombre a cada una de las razones entre los lados, como se indica a continuación:

- El **seno** de α es la razón entre las longitudes del cateto opuesto y de la hipotenusa, lo cual, por simplicidad, escribimos como:

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}}.$$

- El **coseno** de α es la razón entre las longitudes del cateto adyacente y de la hipotenusa:

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Hipotenusa}}.$$

- La **tangente** de α es la razón entre las longitudes del cateto opuesto y del adyacente:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Cateto Adyacente}}.$$

La razones recíprocas a las anteriores se denominan **cosecante**, **secante** y **cotangente**, respectivamente:

$$\operatorname{cosec}(\alpha) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Opuesto}},$$

$$\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)} = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto Adyacente}},$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha)} = \frac{\text{Cateto Adyacente}}{\text{Cateto Opuesto}}.$$

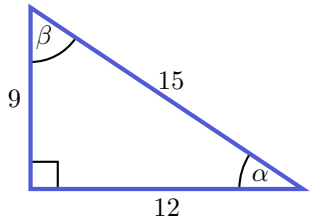
Para resolver los problemas es suficiente con recordar las tres primeras (o bien las tres últimas, pero habitualmente se usan el seno, el coseno y la tangente). Notar que

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}.$$



Mediante semejanza de triángulos puede verse que las razones trigonométricas de un ángulo en realidad no dependen de la medida de los lados del triángulo sino de la medida (amplitud) de dicho ángulo.

Ejemplo 242. **Calculando razones trigonométricas.** Consideremos el siguiente triángulo rectángulo:



Entonces, en este caso tenemos que

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}, \qquad \cos(\alpha) = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}, \qquad \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4};$$
$$\operatorname{sen}(\beta) = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}, \qquad \cos(\beta) = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}, \qquad \operatorname{tg}(\beta) = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}.$$ «

☞ De las definiciones de las razones trigonométricas se puede concluir que, si α y β son los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo, entonces

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \cos(\beta) \quad \text{y} \quad \operatorname{tg}(\alpha) = \operatorname{cotg}(\beta),$$

ya que el cateto opuesto respecto de uno de ellos corresponde al cateto adyacente respecto del otro. Esto puede observarse en los resultados obtenidos en el ejemplo anterior.

Como consecuencia del teorema de Pitágoras, si α es uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, entonces

$$\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = \left(\frac{CO}{H}\right)^2 + \left(\frac{CA}{H}\right)^2 = \frac{H^2}{H^2} = 1,$$

donde *CO*, *CA* y *H* denotan las longitudes del cateto opuesto, del cateto adyacente y de la hipotenusa, respectivamente. Es decir,

$$\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1.$$

Esta es una de las identidades trigonométricas más conocidas*, y permite obtener cada una de las razones involucradas a partir de la otra, sin necesidad de conocer el valor de α:

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}, \qquad \cos(\alpha) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\alpha)}. \tag{6.1.1}$$

*La definición de cada razón trigonométrica presentada puede extenderse a todos los números reales, surgiendo así lo que se conoce como **funciones trigonométricas**. Esta identidad trigonométrica vale para cualquier valor de α real.

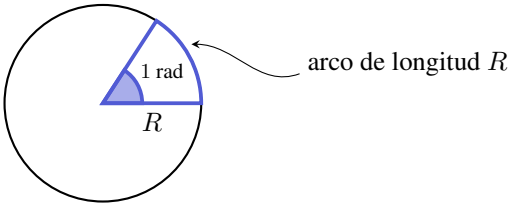
Ejemplo 243. **Utilizando la identidad trigonométrica.** Supongamos que sabemos que $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{3}{5}$. Usando (6.1.1) podemos calcular:

$$\cos(\alpha) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\alpha)} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5},$$

lo que coincide con lo hallado en el Ejemplo 242. «

Existen distintos sistemas de medición para la amplitud de un ángulo. El más usual es el **sistema sexagesimal**, en el cual la unidad de medida es el **grado sexagesimal** (°), que es el resultado de dividir el ángulo llano en 180 partes iguales. Así, un ángulo recto mide 90°, uno llano 180° y un giro entero corresponde a 360°. Cada grado se divide en 60 minutos (’), y cada minuto se divide en 60 segundos (”). Por este motivo recibe el nombre de sexagesimal.

Otro sistema muy utilizado para medir ángulos es el **sistema circular**, cuya unidad de medida es el **radián**, de símbolo rad. Un radián se define como la amplitud de un ángulo que, teniendo su vértice en el centro de una circunferencia, determina un arco en la circunferencia cuya longitud mide lo mismo que el radio, como se ilustra a continuación:



Puede probarse que el radián no depende del tamaño de la circunferencia, y para expresar la medida de un ángulo α en radianes simplemente hacemos $\alpha = \frac{s}{R}$, donde R es el radio de la circunferencia y s es la longitud del arco que el ángulo define sobre la circunferencia.

Sabemos que el ángulo de un giro completo mide 360°, pero ¿cuánto medirá este ángulo en radianes? Por lo anterior, sabemos que este ángulo se expresa en radianes haciendo

$$\frac{\text{longitud del arco}}{R} = \frac{\text{perímetro de la circunferencia}}{R} = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi.$$

Entonces, el ángulo de un giro completo expresado en sistema circular es igual a 2π radianes, y en sistema sexagesimal es 360°, lo que implica que

$$360° = 2\pi \text{ rad}.$$

La igualdad anterior, junto a la regla de tres simple, nos permite concluir que

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \qquad \text{y} \qquad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad.}$$

Estas fórmulas nos dan un modo de convertir grados a radianes, y viceversa:

- **grados a radianes:** se multiplica la cantidad de grados por $\frac{\pi}{180}$ rad.
- **radianes a grados:** se multiplica la cantidad de radianes por $\frac{180^\circ}{\pi}$.

Como caso particular tenemos que

$$1 \text{ rad} \approx 57^\circ, \qquad 180^\circ = \pi \text{ rad} \qquad 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

Ejemplo 244. **Grados versus radianes.** Sean α y β dos ángulos, $\alpha = 30^\circ$ y $\beta = 2$ rad. Podemos comparar entre sí α y β, expresando la amplitud de ambos ángulos en un mismo sistema de medición. Así, tenemos que

$$\alpha = 30 \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \approx 0.52 \text{ rad,}$$

y también

$$\beta = 2 \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{360^\circ}{\pi} \approx 115^\circ.$$

Luego, en cualquier sistema, vemos que β tiene mayor amplitud que α. «

¿Cómo utilizamos la calculadora para hallar las razones trigonométricas conociendo la amplitud de un ángulo? Lo primero que debemos hacer es asegurarnos de que la calculadora se encuentre en el modo correcto. Podemos optar entre grados sexagesimales o radianes, dependiendo de cómo esté expresado el ángulo a ingresar. Esto se consigue con la tecla [MODE], y es fundamental verificar el modo elegido para no cometer errores: para trabajar en grados sexagesimales, hay que seleccionar el modo que aparece indicado en la pantalla como `Deg` (suele ser el número 1), y para trabajar en radianes se utiliza el modo `Rad` (suele ser el 2). La opción indicada como `Gra` se refiere a "gradianes" o grado centesimal, y no a grados sexagesimales, pero no usaremos aquí este sistema de medición de ángulos*. Una vez definido el sistema de medición, contamos con las teclas [sin], [cos] y [tan] para hallar el seno, coseno y tangente de un ángulo, respectivamente. Por ejemplo, si $\alpha = 60^\circ$ colocamos la calculadora en modo grados y obtenemos que

$$\text{sen}(60^\circ) \approx 0.87, \qquad \cos(60^\circ) = 0.5, \qquad \text{tg}(60^\circ) \approx 1.73.$$

Si queremos trabajar en modo radianes, debemos ingresar $\alpha = \pi/3$.

*Se puede corroborar que se ha elegido el modo adecuado observando si en el visor de la calculadora aparece activo un pequeño símbolo `D` para grados o el símbolo `R` para radianes.

La segunda función de las teclas anteriores puede llevar a confusión, ya que las mismas se indican como $\boxed{\sin^{-1}}$, $\boxed{\cos^{-1}}$ y $\boxed{\tan^{-1}}$. Uno podría pensar que estas teclas indican los inversos multiplicativos del seno, coseno y tangente, los cuales llamamos cosecante, secante y cotangente, respectivamente. Sin embargo **esto no es así** y veremos su función en el próximo ejemplo. Para obtener el inverso multiplicativo de un número se utiliza la tecla $\boxed{x^{-1}}$. Así, por ejemplo, habiendo calculado $\operatorname{sen}(60°)$, utilizamos esta tecla para obtener su recíproca, es decir, $\operatorname{cosec}(60°)$.

Las funciones que realizan las teclas $\boxed{\sin^{-1}}$, $\boxed{\cos^{-1}}$ y $\boxed{\tan^{-1}}$ reciben el nombre de **arcoseno**, **arcocoseno** y **arcotangente**, respectivamente. En este texto escribiremos

$$\operatorname{arc\,sen}(\alpha), \qquad \operatorname{arc\,cos}(\alpha), \qquad \operatorname{arc\,tg}(\alpha)$$

para indicar dichas funciones. De este modo evitamos, por ejemplo, confundir $\operatorname{sen}^{-1}(\alpha)$ con $(\operatorname{sen}(\alpha))^{-1} = \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \operatorname{cosec}(\alpha)$.

Estas teclas nos permiten resolver con una calculadora el problema inverso: conociendo la medida de los lados de un triángulo rectángulo, determinar la amplitud de los dos ángulos interiores restantes. Ilustramos esto en los ejemplos siguientes.

Ejemplo 245. **Usando la calculadora para el problema inverso.** Supongamos que para un ángulo agudo α se sabe que $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. ¿Cómo podemos hallar el valor de α? Es ahora donde utilizaremos las teclas antes mencionadas:

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \text{entonces} \qquad \alpha = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

lo que en la calculadora se ingresa como $\boxed{\sin^{-1}}\ (\sqrt{2}/2)$, dando como resultado $\alpha = 45°$ (o bien $\alpha = \frac{\pi}{4}$ rad, según el modo activado en la calculadora). «

Ejemplo 246. **Manejando la calculadora.** Utilizar la calculadora para hallar los valores de α y β sabiendo que $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$ y que $\operatorname{tg}(\beta) = 1$.

Solución: Tenemos que

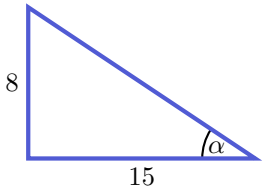
$$\cos(\alpha) = \tfrac{1}{2}, \qquad \text{entonces} \qquad \alpha = \operatorname{arc\,cos}\left(\tfrac{1}{2}\right) = 60°.$$

Análogamente,

$$\operatorname{tg}(\beta) = 1, \qquad \text{entonces} \qquad \beta = \operatorname{arc\,tg}(1) = 45°. \quad «$$

Para ingresar en la calculadora un ángulo cuyos minutos o segundos sean distintos de cero, se utiliza la tecla indicada como [°, ”]. La misma tecla sirve para obtener la expresión en grados, minutos y segundos de un número decimal.

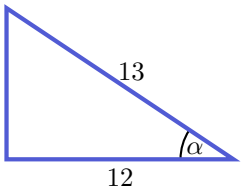
Ejemplo 247. Con los datos indicados, hallar el ángulo α.



Solución: En relación al ángulo α que debemos hallar, los datos conocidos corresponden al cateto opuesto (CO) y al cateto adyacente (CA). La razón trigonométrica que relaciona estas dos cantidades es la tangente:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{CO}{CA} = \frac{8}{15}, \qquad \text{entonces} \qquad \alpha = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{8}{15}\right) \approx 28°4'21''. \qquad \ll$$

Ejemplo 248. Con los datos indicados, hallar el ángulo α.



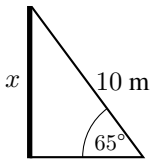
Solución: En relación al ángulo α buscado, los datos conocidos corresponden ahora al cateto adyacente (CA) y a la hipotenusa (H). La razón trigonométrica que relaciona estas dos cantidades es el coseno:

$$\cos(\alpha) = \frac{CA}{H} = \frac{12}{13}, \qquad \text{entonces} \qquad \alpha = \operatorname{arc\,cos}\left(\frac{12}{13}\right) \approx 22°37'12''. \qquad \ll$$

Ahora sí, vamos a utilizar todo lo aprendido para resolver problemas concretos. Se recomienda realizar siempre un gráfico que ilustre la situación, ya que nos ayuda a identificar los datos y las incógnitas, y a hallar así la solución. Además, recordar que luego de efectuar los cálculos necesarios, es fundamental enunciar la **respuesta** al problema.

Ejemplo 249. Determinar la altura de un poste sabiendo que cuando una escalera de 10 metros de longitud se apoya en la parte superior de él, forma un ángulo de 65° con el suelo.

Solución:



Con respecto al ángulo dado como dato, la incógnita x es la medida del cateto opuesto. Además, se tiene como dato la longitud de la hipotenusa (escalera). La razón trigonométrica que involucra a estos tres valores es el seno:

$$\operatorname{sen}(65^\circ) = \frac{CO}{H} = \frac{x}{10}, \quad \text{entonces} \quad x = 10 \cdot \operatorname{sen}(65^\circ) \approx 9.$$

Respuesta: La altura aproximada del poste es de 9 metros. «

Ejemplo 250. En el problema anterior, ¿a qué distancia del pie del poste se encuentra apoyada la base de la escalera?

Solución: En este caso, con respecto al ángulo dado como dato, la incógnita es la medida del cateto adyacente, *CA*. Además, se conoce la longitud de la hipotenusa. La razón trigonométrica que involucra a estos tres valores es el coseno:

$$\cos(65^\circ) = \frac{CA}{H} = \frac{CA}{10}, \quad \text{entonces} \quad CA = 10 \cdot \cos(65^\circ) \approx 4.23.$$

Respuesta: La base de la escalera se encuentra apoyada a 4.23 metros del pie del poste, aproximadamente. «

Ejemplo 251. **Un problema de sombras.** Dada la lejanía y el tamaño del Sol, se puede pensar que, en regiones pequeñas de la Tierra, todos los rayos de luz llegan a ella como rectas paralelas entre sí. Entonces, en cada momento fijo del día, el ángulo que los mismos forman con respecto al suelo no cambia entre objetos cercanos. Este ángulo es el que determina la longitud de la sombra de un objeto: al amanecer y al anochecer el ángulo es muy agudo, dando sombras muy largas. Al mediodía, el ángulo es recto y prácticamente no hay sombra. Nos referiremos a este como "el ángulo que forman los rayos solares con el suelo", el cual se ilustra en la Figura 6.1. Como una aplicación de trigonometría, sabiendo el ángulo que forman los rayos solares en un momento y lugar determinados, podemos usar el largo de la sombra de un objeto para determinar su altura.

Por ejemplo, supongamos que la sombra de un ciprés mide 17 metros cuando los rayos solares forman un ángulo de 50° con el suelo. Con estos datos podemos calcular la altura del ciprés de la siguiente forma: graficando un triángulo como en los dibujos anteriores, lo que conocemos es $\alpha = 50^\circ$, y que el cateto adyacente mide 17 metros. La altura del ciprés es la longitud del cateto opuesto. La razón trigonométrica que relaciona a estos tres valores es la tangente:

$$\operatorname{tg}(50^\circ) = \frac{CO}{CA} = \frac{x}{17}, \quad \text{entonces} \quad x = 17 \cdot \operatorname{tg}(50^\circ) \approx 20.26.$$

Luego, el ciprés mide aproximadamente 20.26 metros. «

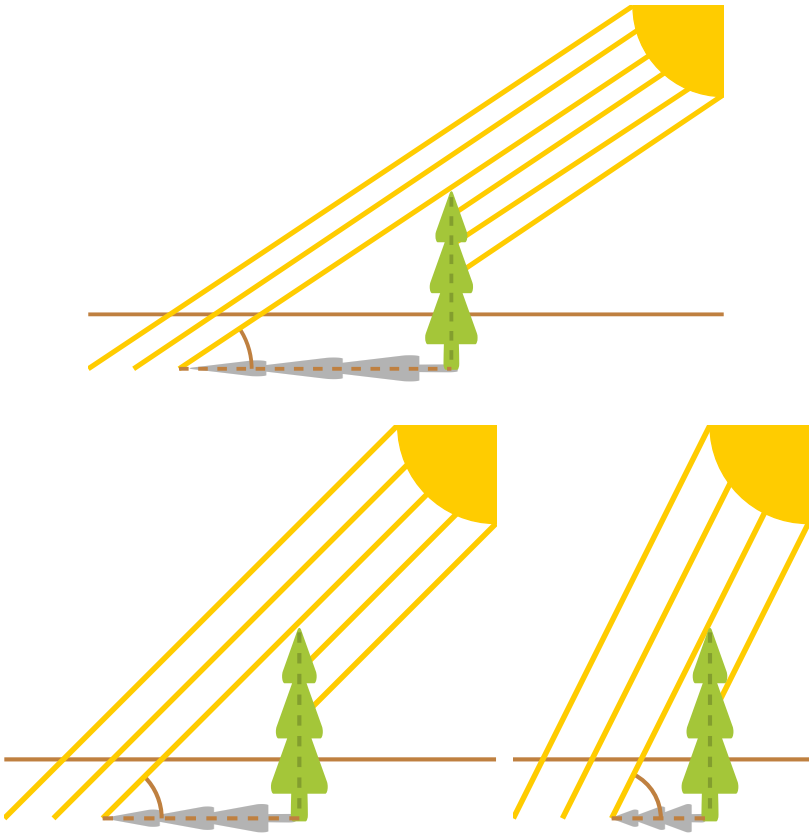


Figura 6.1: Ángulo que forman los rayos solares con el suelo.

Finalizamos la sección con algunas razones trigonométricas de ángulos "especiales". En el Ejercicio 11 se pide utilizar estas razones para hallar las restantes.

α	$\operatorname{sen}(\alpha)$	$\cos(\alpha)$
$30° = \frac{\pi}{6}\text{rad}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$45° = \frac{\pi}{4}\text{rad}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$60° = \frac{\pi}{3}\text{rad}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Tabla 6.1: Seno y coseno de algunos ángulos "especiales".

Ejercicios 6.1

1. Sabiendo que los catetos de un triángulo rectángulo miden 15 y 8 unidades, usar el teorema de Pitágoras para hallar la longitud de la hipotenusa.

2. Ingresar los puntos $A = (0, 8)$, $B = (15, 0)$ y $C = (0, 0)$. Con la herramienta seleccionar los tres puntos, y luego nuevamente el primero de ellos. Esto también puede hacerse mediante el comando Polígono(A,B,C,A). Notar que GeoGebra proporciona la longitud de todos los lados. Comparar la longitud de la hipotenusa con lo obtenido en el ejercicio anterior.

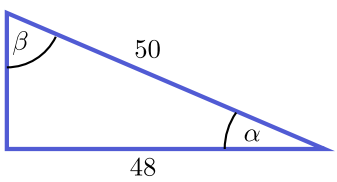
3. Sabiendo que la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 26 unidades y uno de sus catetos mide 24, hallar la longitud del otro cateto.

4. Una escalera de 7 metros de longitud está apoyada sobre una pared, y su pie dista 3 metros de ella.

(a) ¿A qué altura se apoya la parte superior de la escalera en la pared?

(b) ¿A qué distancia de la pared habrá que apoyar el pie de la escalera para que la parte superior se apoye en la pared a una altura de 5 metros?

5. Para el siguiente triángulo, hallar las razones trigonométricas indicadas:



$\operatorname{sen}(\alpha) =$ ____

$\operatorname{cotg}(\alpha) =$ ____

$\operatorname{cosec}(\beta) =$ ____

$\cos(\beta) =$ ____

6. Completar:

(a) Cada una de las ____ partes iguales en las que se divide el ángulo central de una circunferencia se llama grado sexagesimal.

(b) Si se toma una circunferencia de radio R, y se lleva esa longitud R sobre un arco de la misma, el ángulo central determinado por el arco y sus radios extremos mide un ____.

7. Hallar la medida de los ángulos α y β del Ejercicio 5. Expresarlos en grados sexagesimales y en radianes.

8. Hallar la medida de cada uno de los ángulos interiores de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 70 y 24 unidades. Expresarlos en grados sexagesimales y en radianes.

9. Ingresar los puntos $A = (0, 70)$, $B = (24, 0)$ y $C = (0, 0)$ y trazar el polígono que tiene a estos puntos como vértices, como se indica en el Ejercicio 2 . Con la herramienta  hallar los ángulos interiores del triángulo formado. La medida de todos los ángulos interiores de un polígono puede obtenerse mediante el comando ÁngulosInteriores, que evita tener que calcular uno por uno. Comparar los resultados con lo obtenido en el ejercicio anterior.

10. Sabiendo que α es un ángulo agudo que satisface $\operatorname{sen}(\alpha) = 0.78801$, hallar $\cos(\alpha)$ de dos formas distintas: primero determinando el valor de α para calcular su coseno, y luego mediante la identidad dada en (6.1.1).

11. Completar utilizando la Tabla 6.1 y las relaciones entre las razones trigonométricas, racionalizando denominadores cuando sea necesario:

α	$\operatorname{tg}(\alpha)$	$\operatorname{cosec}(\alpha)$	$\sec(\alpha)$	$\operatorname{cotg}(\alpha)$
$30° = \frac{\pi}{6}$rad				
$45° = \frac{\pi}{4}$rad				
$60° = \frac{\pi}{3}$rad				

12. Una escalera de 6 metros se apoya contra la pared de una casa, formando con ella un ángulo de $67°$. Hallar la altura a la que se apoya la escalera en la pared.

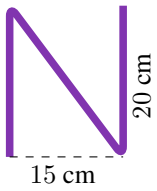
13. Se dispone de una madera de 20 metros para realizar una rampa desde el suelo hasta el techo de una casa de 12 metros de altura, que permita subir materiales de construcción. ¿Qué pendiente tendrá la rampa? (Es decir, se pide el ángulo que forma la rampa con el suelo).

14. El lado de un rectángulo mide 4 metros y la diagonal forma con dicho lado un ángulo de $33°$. Calcular la longitud de la diagonal y el área del rectángulo.

15. La base de un triángulo isósceles (la cual corresponde al lado desigual) mide 64 cm, y el ángulo que se forma entre los lados iguales es de $40°$. Calcular el perímetro y el área del triángulo.

16. Sabemos que el lado desigual de un triángulo isósceles dado mide 18 metros, y su altura es de 10 metros. ¿Cuánto miden sus ángulos?

17. **(a)** Determinar la cantidad de centímetros que se necesitan de una varilla de hierro para realizar la letra N con las dimensiones indicadas a continuación:



(b) Hallar el ángulo que debe considerarse para soldar la parte "diagonal" de la letra.

(c) Si solamente se disponen de 61.9 cm de hierro, ¿qué ancho deberá tener como máximo la letra para que el hierro sea suficiente, manteniendo el mismo alto?

18. Un tronco de 6.2 metros está apoyado en una pared y forma con el suelo un ángulo de $55°$.

(a) ¿A qué altura de la pared se encuentra apoyado?

(b) Calcular la distancia desde el extremo inferior del tronco hasta la pared.

19. Calcular la altura de una torre si se sabe que su sombra mide 270 metros cuando los rayos solares forman un ángulo de $30°$ con el suelo.

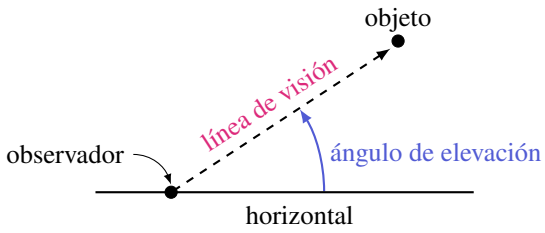
20. Cuando los rayos solares forman un ángulo de $70°$ con el suelo, un edificio proyecta una sombra de 20 metros de longitud. ¿Qué altura tiene el edificio?

21. Hallar la longitud de la sombra de un árbol de 8 metros de altura cuando los rayos solares forman con la horizontal un ángulo de $30°$.

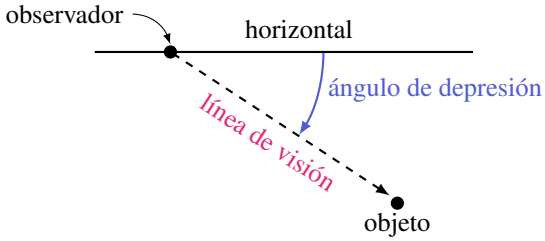
22. Calcular la longitud de la sombra que proyecta una persona que mide 1.8 metros cuando los rayos del Sol forman un ángulo de $35°$ con el suelo.

6.2. Problemas del observador

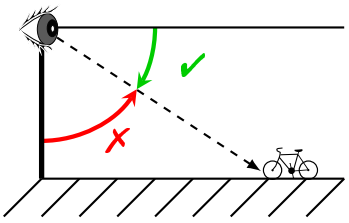
Para poder resolver más problemas aplicando los conceptos estudiados, recordaremos ahora cierta terminología referida a un observador que se encuentra mirando un determinado objeto. Salvo que se indique lo contrario, supondremos siempre que el observador se encuentra al nivel del suelo (es decir, no consideramos la altura del observador). La línea que une el ojo del observador con el objeto es llamada **línea de visión**. Si el objeto se encuentra por encima del nivel del observador, el ángulo formado por la línea de visión y la horizontal recibe el nombre de **ángulo de elevación**, como se ilustra en el siguiente gráfico:



Similarmente, si el objeto se encuentra por debajo del observador, el ángulo formado por la horizontal y la línea de visión es llamado **ángulo de depresión**.



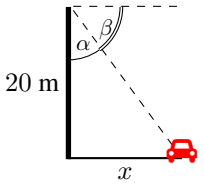
Los ángulos de depresión aparecen, por ejemplo, cuando el observador se encuentra sobre una torre o edificio de cierta altura. Al momento de plantear el problema, el ángulo de depresión suele confundirse con el formado entre la línea de visión y la torre, es decir, el que queda "hacia abajo" de la línea de visión. Es necesario comprender la definición de este ángulo para evitar este error frecuente. De manera no formal, el ángulo de depresión indica cuánto debo "bajar" la mirada para ver el objeto.



Finalizamos la sección desarrollando algunos ejemplos que ilustran la aplicación de lo anterior en la resolución de problemas concretos. Observar que en ciertas situaciones, como en la del Ejemplo 254, será necesario resolver un sistema de dos ecuaciones lineales mediante alguno de los métodos presentados en el Capítulo 4.

Ejemplo 252. Desde la parte superior de un edificio de 20 metros de altura, un hombre observa su auto situado en el suelo. Si el ángulo de depresión formado es de $61°39'$, calcular la distancia del auto al edificio.

Solución:



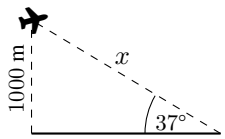
El ángulo dado como dato es $\beta = 61°39'$, y por lo tanto $\alpha = 90° - \beta = 28°21'$. Con respecto a α, la incógnita x es la medida del cateto opuesto. Además, se tiene como dato la longitud del cateto adyacente a α. La razón trigonométrica que involucra a estos tres valores es la tangente:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{CO}{CA} = \frac{x}{20}, \quad \text{entonces} \quad x = 20 \cdot \operatorname{tg}(28°\,21') \approx 10.79.$$

Respuesta: El auto está a 10.79 metros del edificio, aproximadamente. «

Ejemplo 253. En un determinado momento, una persona observa un avión que se encuentra volando a 1000 metros de altura, con un ángulo de elevación de 37°. Hallar la distancia entre el avión y dicha persona.

Solución:



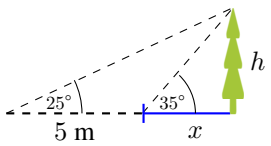
Con respecto al ángulo dado como dato, se conoce la longitud del cateto opuesto, y la incógnita x es la medida de la hipotenusa. La razón trigonométrica que involucra a estos tres valores es el seno:

$$\operatorname{sen}(37°) = \frac{CO}{H} = \frac{1000}{x}, \quad \text{entonces} \quad x = \frac{1000}{\operatorname{sen}(37°)} \approx 1661.64.$$

Respuesta: El avión se encuentra aproximadamente a 1661.64 metros de la persona que lo observa. «

Ejemplo 254. Nazareno está descansando en la orilla de un río mientras observa un pino que está en la orilla opuesta. Mide el ángulo que forma su visual con el punto más alto del pino y obtiene 35°. Además, si retrocede 5 metros y mide el nuevo ángulo de elevación, obtiene uno de 25°. Calcular la altura del árbol y el ancho del río.

Solución:



Llamemos x al ancho del río y h a la altura del pino. Sabemos que

$$\operatorname{tg}(35°) = \frac{h}{x} \quad \text{y} \quad \operatorname{tg}(25°) = \frac{h}{5+x}.$$

Este es un sistema con dos ecuaciones y dos incógnitas, el cual podemos resolver, por ejemplo, despejando h de cada una de las igualdades para obtener

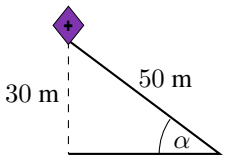
$$h = \operatorname{tg}(35°)x \quad \text{y} \quad h = \operatorname{tg}(25°)(5+x).$$

Igualando estas dos expresiones obtenemos $\mathrm{tg}(35°)x = \mathrm{tg}(25°)(5+x)$, y resolviendo esta ecuación en x tenemos que $x \approx 9.97$. Reemplazando este valor en cualquiera de las dos expresiones para h nos queda $h \approx 6.98$.

Respuesta: El ancho del río es de 9.97 metros, y el pino tiene una altura de 6.98 metros, aproximadamente. «

Ejemplo 255. Un barrilete se encuentra volando a 30 metros de altura, y su hilo mide 50 metros de largo. Hallar el ángulo que forma el hilo con el piso.

Solución:



Llamemos α al ángulo buscado. Con respecto a él, lo que conocemos es la longitud del cateto opuesto. Además, conocemos la medida de la hipotenusa del triángulo formado. La razón trigonométrica que involucra a estos tres valores es el seno:

$$\mathrm{sen}(\alpha) = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}, \quad \text{entonces} \quad \alpha = \mathrm{arc\,sen}\left(\frac{3}{5}\right) \approx 36°52'12".$$

Respuesta: El ángulo aproximado que forma el hilo con el piso es de $36°52'\ 12"$. «

Ejercicios 6.2

1. Hallar la altura de una antena sabiendo que a una distancia de 18 metros de la base se observa la parte superior de la misma con un ángulo de elevación de $30°$.

2. Desde la terraza superior de un edificio de 150 metros de altura se observa el techo de otro edificio más alto con un ángulo de elevación de $45°$. La distancia entre las bases de ambos edificios es de 21 metros. Calcular la altura del otro edificio.

3. Desde el quinto piso de un edificio se observa un recipiente para basura situado en la vereda, con un ángulo de depresión de $56°18'$. Calcular la altura a la que se encuentra el observador, sabiendo que el recipiente está a 10 metros de la base del edificio.

4. Desde un avión que se encuentra a 4500 metros de altura se observan dos autos ubicados hacia el mismo lado del avión, con un ángulo de depresión de $62°$ y $35°$ respectivamente. Determinar la distancia entre ambos autos.

5. Se quiere medir la altura de un monumento colocado en el centro de un lago artificial circular, sin ingresar al mismo. Para ello se observa el extremo superior del monumento desde el borde del lago y se mide el ángulo de

elevación, el cual resulta ser de $50°$. Luego, se aleja 0.45 metros y se vuelve a medir, obteniendo un ángulo de $35°$. Hallar la altura del monumento y la superficie del lago. *Sugerencia:* plantear un sistema como en el Ejemplo 254.

6. Desde un punto del suelo se ve la punta de la copa de un pino bajo un ángulo de elevación de $42°$. Si nos alejamos 2.5 metros hacia otro punto del suelo, alineado con el anterior y con el pie del pino, vemos la punta de la copa bajo un ángulo de $24°$. Calcular la altura del pino.

7. Un hombre observa el extremo superior de un edificio con un ángulo de elevación de $45°$. Si se aleja 45 metros, el nuevo ángulo de elevación es de $30°$. Hallar la altura del edificio.

Autoevaluación clásica 1

(Los ejercicios **1(c)**, **1(d)** y **4** NO CORRESPONDEN a este curso).

1. Resolver las siguientes ecuaciones e inecuaciones:

(a) $(x-5)^4 - 2 = 14$

(b) $\frac{x^3+3x^2}{\ln(x+2)} = 0$

(c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2(1+x)} < 2^{6+x^3}\,\frac{1}{2^{4x-9}}\,4^x$

(d) $x^4 + 4x^3 - 11x^2 + 4x - 12 \geq 0$ (se debe factorizar el polinomio).

2. En un club, el valor mensual de la cuota societaria es de \$270, pero no incluye el uso de las canchas de Fútbol 5. Este acceso (por hora) tiene un costo de \$90 por persona, con un descuento del 30 % para socios.

(a) Hallar las funciones que determinen el costo mensual en función de la cantidad de horas de acceso a la cancha para cada caso (socios y no socios), y graficar ambas en un mismo sistema.

(b) Determinar la cantidad de horas de acceso a la cancha que implican el mismo costo mensual para socios y no socios.

(c) Si una persona desea usar la cancha 4 horas al mes, ¿le conviene o no asociarse? ¿Y si quiere usarla 12 horas mensuales?

3. La altura aproximada de una pelota (en metros) está dada por

$$h(t) = -5t^2 + 30t + 35,$$

siendo t el tiempo en segundos luego de su lanzamiento.

(a) ¿Desde qué altura fue arrojada la pelota? ¿En qué otro instante se encuentra a dicha altura?

(b) Indicar la altura de la pelota luego de 2 segundos de haber sido arrojada.

(c) Hallar la altura máxima que alcanza la pelota, y el tiempo que demora en alcanzarla.

(d) Determinar cuánto tiempo le toma a la pelota llegar al suelo.

(e) Determinar el intervalo de tiempo luego de su lanzamiento, en el que la altura de la pelota supera los 75 metros.

4. Una estampilla de colección vale \$4000 en la actualidad, y su valor aumenta un 20 % cada año.

(a) Hallar una fórmula que permita obtener el precio de la estampilla dentro de t años. Bosquejar el aspecto de la gráfica.

(b) ¿Cuánto valdrá la estampilla dentro de 5 años?

(c) ¿Cuánto habrá que esperar para que el precio supere los \$17000?

5. Con una varilla de hierro se desea producir un triángulo isósceles que posea la siguiente propiedad: su altura es igual a $\frac{2}{3}$ de la longitud de la base (considerando como base al lado desigual).

(**a**) Determinar las longitudes de los lados del triángulo para que la cantidad de hierro utilizada sea 1.6 metros.

(**b**) Hallar el ángulo aproximado que formarán los lados del triángulo con la base.

(**c**) Si se desea mantener la misma longitud de la base, determinar la altura aproximada que tendrá el triángulo si los lados se sueldan a la base formando un ángulo de $50°$. ¿Cuánto deben medir los lados en este caso?

Puntaje para la autocorrección

Pregunta	Puntos por cada inciso
1	5-5-5-10
2	5-5-5
3	5-5-5-5-5
4	10-5-5
5	5-5-5

Autoevaluación clásica 2

(Los ejercicios **1(a)**, **1(d)**, **2** y **4** NO CORRESPONDEN a este curso).

1. Resolver las siguientes ecuaciones e inecuaciones:

(a) $(x+5)^4 - 5 > 76$

(b) $\log(x-3) + \log(x+1) = \log 3 + \log(x-1)$

(c) $2^{x(x+3)}(32)^x = \frac{2^{3x}}{4^3}$

(d) $x^3 + 3x^2 - 10x - 24 \geq 0$ (se debe factorizar el polinomio).

2. Una persona pinta macetas pequeñas y grandes, las cuales venderá en una feria. La ganancia obtenida por cada maceta pequeña vendida es de $\$20$, mientras que por cada maceta grande gana $\$45$. En la feria, por razones de espacio, le permiten llevar hasta 45 macetas en total. Además, sucede que le quedan solamente 40 macetas pequeñas disponibles para pintar, y 50 horas de trabajo para producir lo que llevará a la feria. Teniendo en cuenta lo anterior, y que ocupa una hora de trabajo por cada maceta pequeña, y una hora y media por cada maceta grande, se pide:

(a) Plantear el sistema con las restricciones del problema y graficar la región factible.
(b) Determinar la cantidad de cada tipo de maceta que debe fabricar para que el beneficio sea máximo, e indicar el valor del mismo.

3. Una persona dispara con una pistola lanza-pelotas en línea recta desde el suelo (tiro vertical). Según indica el manual de la pistola, la velocidad de lanzamiento es de 29.4 m/s.

(a) Hallar la velocidad y altura de la pelota luego de 2 segundos de haber sido lanzada. ¿En qué instante la velocidad de la pelota es -10 m/s?
(b) Hallar los instantes aproximados en los cuales la pelota se encuentra a 24 metros de altura.
(c) Determinar cuánto tiempo demora la pelota en caer al suelo.
(d) Determinar la altura máxima que alcanza la pelota, y el momento en el cual la alcanza.

4. Una reserva ecológica tiene un programa de protección de una especie de ave en peligro de extinción, lo que hace que cada año la población se incremente en un $20\,\%$. Si al iniciar el programa se contaba con 35 ejemplares, se pide:

(a) Hallar una fórmula que permita estimar la población de dichas aves en la reserva, luego de t años del inicio del programa. Bosquejar el aspecto de la gráfica.
(b) Estimar la población de esta especie luego de 6 años del inicio del programa.
(c) Determinar la cantidad de tiempo necesaria para que la población alcance los 150 individuos.

(**d**) Hallar la cantidad mínima de ejemplares con la que debió comenzar el programa, para que luego de 6 años haya al menos 119 de ellos.

5. Un herrero debe fabricar el marco de una ventana, cuyo diseño es un rectángulo y sus diagonales.

(**a**) Determinar las dimensiones del rectángulo, sabiendo que la base mide $\frac{4}{3}$ de lo que mide la altura, y que la cantidad total de hierro utilizado (incluyendo las diagonales), es de 24 metros.
(**b**) Determinar el ángulo que forma cada diagonal con la base.
(**c**) Hallar la altura de la ventana, suponiendo que las diagonales se sueldan sobre la misma base (igual longitud que la hallada) formando un ángulo de $30°$. ¿Cuánto deben medir las diagonales en este caso?

Puntaje para la autocorrección

Pregunta	Puntos por cada inciso
1	5-5-5-10
2	10-10
3	5-5-5-5
4	5-5-5-5
5	5-5-5

Respuestas

El razonamiento matemático

1. Para demostrar que la afirmación dada es falsa es suficiente con hallar un par de números reales positivos a y b para los cuales no vale la igualdad. Por ejemplo, tomando $a = 1$ y $b = 1$ tenemos, por un lado, $\sqrt{a+b} = \sqrt{2}$ y, por el otro, $\sqrt{1} + \sqrt{1} = 1 + 1 = 2$.

2. No, no será suficiente con probar que la igualdad vale para muchos pares de números reales positivos a y b, pues para que sea verdadera debe valer para todos los casos posibles, los cuales son infinitos. La veracidad de la afirmación se enuncia luego en la página 31.

3. **(a)** No necesariamente, no dijo que es el único caso en que iría caminando.

(b) No necesariamente, no dijo cómo iría si no comenzara por la tarde.

(c) Verdadero, ya que si hubiera comenzado por la tarde, habría ido caminando.

(d) Verdadero, es exactamente lo que afirma.

4. **(a)** Verdadero, es el único caso en el que iría caminando.

(b) Verdadero, ya que el único caso en el que iría caminando es si el examen comenzara por la tarde.

(c) No necesariamente, pues dijo cuál es el único caso en el que iría caminando, pero no establece que es la única forma de ir.

(d) No necesariamente, pues dijo que ese es el único caso en el que iría caminando, pero no establece que es la única forma de ir.

5. El enunciado establece que son equivalentes “ir caminado” y “el examen comienza por la tarde”, así que las cuatro conclusiones son verdaderas.

6. Sergio dijo que si viajara, entonces antes llevaría el auto al taller. No al revés. Es decir, no dijo que solamente lo llevaría antes de viajar. Quizás lo llevó porque tenía un desperfecto, a pesar de que no esté por viajar.

Capítulo 1

Sección 1.1

1. **(a)** $A = \{\text{r, e, g, a, l}\}$; $B = \{\text{e, a}\}$; $C = \{\text{a, l, e, g, r}\}$.

(b) $B \subseteq A$ pues todo elemento de B pertenece a A, y $A = C$ porque tienen los mismos elementos.

2. **(a)** V, pues 2 es uno de los elementos de F.

(b) F, pues por ejemplo $3 \in F$ pero $3 \notin G$.

(c) V, pues tanto 2 como 4 son elementos de F.

(d) F, lo correcto es $\{2,\ 4\} \subseteq F$.

(e) V, pues H está formado por conjuntos y $\{2,\ 4\}$ es uno de ellos.

(f) V, pues $G = \{2,\ 4\}$.

(g) F, lo correcto es $\{2\} \subseteq F$, o bien $2 \in F$.

(h) V, pues H está formado por conjuntos y $\{2\}$ es uno de ellos.

(i) V, pues tanto 1 como 5 son elementos de F.

3. **(a)** Sí, pues todo elemento de B pertenece a A.

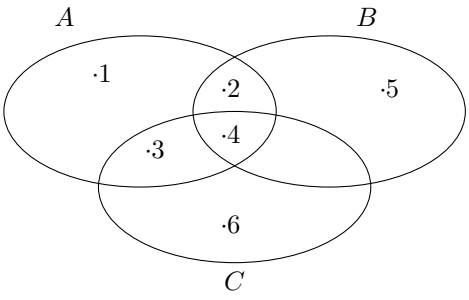
(b) No, pues $7 \in C$ pero $7 \notin A$.

(c) No, pues por ejemplo $2 \in A$ pero $2 \notin C$.

(d) No, pues por ejemplo $2 \in B$ pero $2 \notin C$.

Sección 1.2

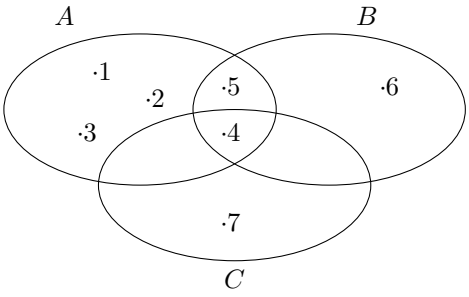
1. La representación gráfica de los conjuntos es la siguiente:



Daremos la respuesta de cada inciso por extensión, sin sombrear el área correspondiente a cada caso.

(a) $U = A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
(b) $A \cap B = \{2, 4\}$
(c) $(A \cap C)^c = \{1, 2, 5, 6\}$
(d) $A \cap B \cap C = \{4\}$
(e) $(A \cup B) \cap C = \{3, 4\}$
(f) $A - C = \{1, 2\}$
(g) $B^c = \{1, 3, 6\}$
(h) $(A \cup B) - C = \{1, 2, 5\}$
(i) $A \cup (B - C) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
(j) $(A \cup B)^c = \{6\}$

2. La representación gráfica de los conjuntos es la siguiente:



Daremos la respuesta de cada inciso por extensión, sin sombrear el área correspondiente a cada caso.

(a) $U = A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
(b) $A \cap B = \{4, 5\}$
(c) $(A \cap C)^c = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$
(d) $A \cap B \cap C = \{4\}$
(e) $(A \cup B) \cap C = \{4\}$
(f) $A - C = \{1, 2, 3, 5\}$
(g) $B^c = \{1, 2, 3, 7\}$
(h) $(A \cup B) - C = \{1, 2, 3, 5, 6\}$
(i) $A \cup (B - C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
(j) $(A \cup B)^c = \{7\}$

3. $A \cap A^c = \varnothing$ y $A \cup A^c = U$. Por ejemplo, podemos considerar los conjuntos $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $A = \{2, 4\}$.

Capítulo 2

Sección 2.1

1. $-15 < -7 < -2 < 0 < 4 < 6 < 8 < 12$.

2. $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $C = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

3. La respuesta no es única, ya que depende de si se toman desigualdades estrictas o no, o extremos enteros o no. Si consideramos solamente desigualdades no estrictas con extremos enteros, entonces:

$$E = \{x \in \mathbb{N} : 2 \leq x \leq 3\}, \quad F = \{x \in \mathbb{Z} : -2 \leq x \leq 4\},$$

$$G = \{x \in \mathbb{N} : 7 \leq x \leq 11\}.$$

4. El primer elemento de H es 5, el de J es 1, y el de K es -3. El conjunto I no tiene primer elemento.

Sección 2.2

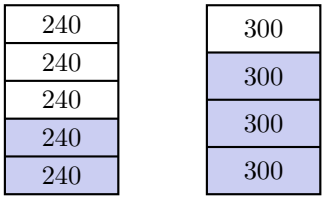
1. propia; impropia; aparente; impropia; propia.

2. No, pues $2 \cdot 24 \neq 8 \cdot 3$. Sí, porque $1 \cdot 24 = 8 \cdot 3 = 24$. No, pues $3 \cdot 8 \neq 9 \cdot 4$. Sí, porque $5 \cdot 9 = 15 \cdot 3$.

3. $\frac{4}{5} = \frac{16}{20}$; $\frac{3}{7} = \frac{12}{28}$; $\frac{5}{3} = \frac{-5}{-3}$; $\frac{-6}{4} = \frac{-3}{2}$.

4. $\frac{10}{8} = \frac{5}{4}$; $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$; $\frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$; $\frac{28}{21} = \frac{4}{3}$; $\frac{36}{60} = \frac{3}{5}$.

5. En $\frac{2}{5}$ del tanque hay 480 litros de agua, y en $\frac{3}{4}$ del tanque hay 900 litros. Los gráficos respectivos son:



6. Se usarán \$850 en bebida y \$1785 en comida. Quedan disponibles \$340, los cuales representan un $\frac{4}{35}$ del total.

7. El envase de la marca A contiene $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ de litro, mientras que el envase de la marca B contiene $\frac{7}{10}$ de litro. Luego, el litro de leche marca A cuesta $\frac{5}{3} \cdot 24 = 40$ pesos, mientras que el litro de leche marca B cuesta $\frac{10}{7} \cdot 21 = 30$ pesos.

Subsección 2.3.1

1. **(a)** 31
(b) -45
(c) 90
(d) 37
(e) $2\sqrt[3]{25}$
(f) $\sqrt{7}$
(g) $\frac{2}{3}\sqrt[6]{16} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{4}$
(h) -73
(i) $\frac{2}{5}$

2. **(a)** $x^{\frac{5}{3}}y^{-5}$
(b) x^{-2}
(c) $a^{\frac{11}{30}}$
(d) $ab^{\frac{3}{4}}c^{-1}$
(e) $(a+2a^3-3)\sqrt{a}$

3. **(a)** $\frac{1}{5}\sqrt[4]{5^3}$
(b) $\sqrt[5]{3}$
(c) $\frac{\sqrt[3]{ab^2}}{ab}$
(d) $a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{13}{6}}$

4. **(a)** $\ln\left(x^4(x+3)^{\frac{1}{4}}\right)$
(b) $\log\frac{x^5y^2}{z^3}$
(c) $\log_2\frac{4a^3}{x^5}$
(d) $\log_a\left(x^5(x+1)^5\right)$

5. Es muy sencillo hallar casos para los que las igualdades no se cumplan.

6. El error fue aplicar la propiedad distributiva de la potencia con respecto a la suma:

$$x^2 + y^2 \neq (x+y)^2.$$

La dosis debe ser de $36^2 + 4^2 = 1312$ miligramos, y no de $(36+4)^2 = 40^2 = 1600$ miligramos.

7. $(-2)^4 = 16$ y $-2^4 = -16$. Los resultados son opuestos. Esto demuestra la importancia del paréntesis.

8. $(-2)^3 = -8$ y $-2^3 = -8$. Los resultados son iguales. La diferencia con el ejercicio anterior es que la potencia es impar ahora.

9. La igualdad incorrecta es la (b), ya que las propiedades de la potencia no son necesariamente válidas cuando la base es negativa.

10. El razonamiento correcto es el segundo, ya que la definición de potencia con exponente racional no puede aplicarse si el mismo no está en su forma irreducible cuando la base es negativa.

Subsección 2.3.2

1. 2.65×10^{18} metros

2. 1.5×10^{-22} kilogramos

3. 1.0204×10^{28} litros

4. 1.02×10^{-23} gramos

5. 3567400000

6. 0.0000000123

7. 640000

8. 0.0000082

Subsección 2.3.3

1. **(a)** $5 < 8$, entonces $5 - 2 < 8 - 2$.

(b) $5 < 8$, entonces $5 \cdot (-2) > 8 \cdot (-2)$.

(c) $2 > (-3)$, entonces $2 \cdot 4 > (-3) \cdot 4$.

(d) $(-4) < (-3)$, entonces $(-4) \cdot (-2) > (-3) \cdot (-2)$.

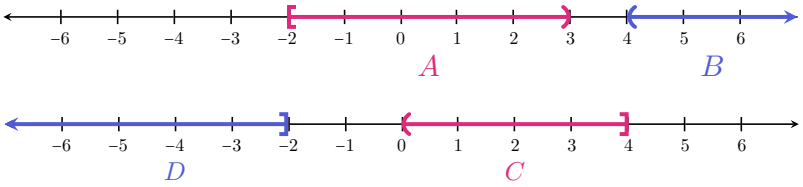
(e) $5 > 3$, entonces $5^{\frac{1}{2}} > 3^{\frac{1}{2}}$.

(f) $4 < 6$, entonces $4^3 < 6^3$.

(g) $4 < 6$, entonces $\log_3 4 < \log_3 6$.

(h) $4 < 6$, entonces $\log_{\frac{1}{3}} 4 > \log_{\frac{1}{3}} 6$.

2. $A = [-2, 3)$; $B = (4, \infty)$; $C = (0, 4]$; $D = (-\infty, -2]$.

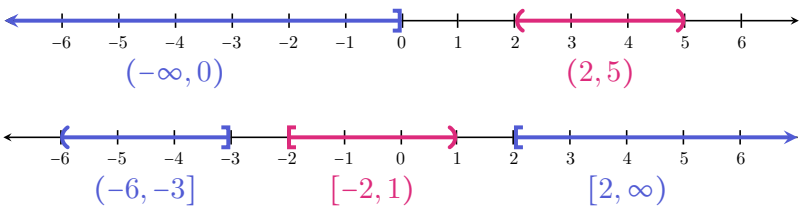


3.

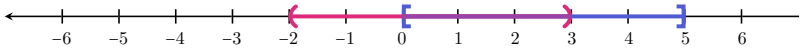
$$(2, 5) = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x < 5\}, \qquad [2, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\},$$

$$[-2, 1) = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x < 1\},$$

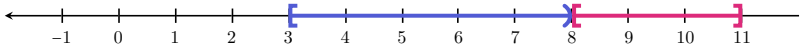
$$(-\infty, 0) = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}, \qquad (-6, -3] = \{x \in \mathbb{R} : -6 < x \leq -3\}.$$



4. **(a)** $(-2,3)\cup[0,5]=(-2,5]$; $\quad(-2,3)\cap[0,5]=[0,3)$.



(b) $[3,8)\cup[8,11]=[3,11]$; $\quad[3,8)\cap[8,11]=\varnothing$.



(c) $(-3,2]\cup[2,6)=(-3,6)$; $\quad(-3,2]\cap[2,6)=\{2\}$.



Subsección 2.3.4

1. **(a)** 15
(b) 7
(c) -8
(d) 4
(e) -4
(f) 4

2. **(a)** $|x-2|=\begin{cases} x-2, & \text{si } x-2\geq 0,\\ 2-x, & \text{si } x-2<0.\end{cases}$

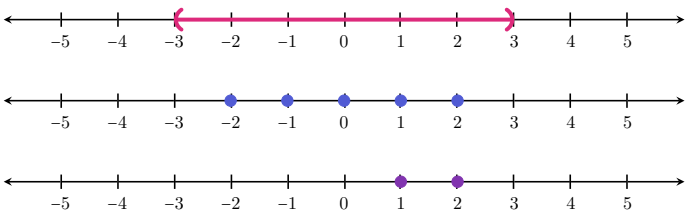
(b) $2|3-x|+5=\begin{cases} -2x+11, & \text{si } 3-x\geq 0,\\ 2x-1, & \text{si } 3-x<0.\end{cases}$

(c) $|2y-3|-1=\begin{cases} 2y-4, & \text{si } 2y-3\geq 0,\\ -2y+2, & \text{si } 2y-3<0.\end{cases}$

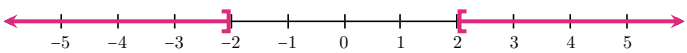
(d) $-4|x+1|=\begin{cases} -4x-4, & \text{si } x+1\geq 0,\\ 4x+4, & \text{si } x+1<0.\end{cases}$

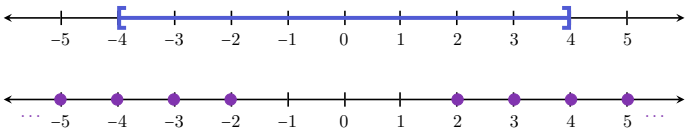
(e) $|-x-1|+2=\begin{cases} -x+1, & \text{si } -x-1\geq 0,\\ x+3, & \text{si } -x-1<0.\end{cases}$

3. A continuación, graficamos los conjuntos A, B y C, respectivamente:



4. A continuación, graficamos los conjuntos A, B y C, respectivamente:





5. $A = [-1, 1]$, $B = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$, $C = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$, $D = (-3, 3)$.

6. **(a)** $-4 < x - 2 < 4$

(b) $3x + 1 \geq 2$ o $3x + 1 \leq -2$

(c) $-6 \leq 3y \leq 6$

(d) $-y + 1 > 2$ o $-y + 1 < -2$

(e) $-2 \leq t + 5 \leq 2$

7. $\{x \in \mathbb{R} : |x| < -3\} = \varnothing$, $\{x \in \mathbb{R} : |x| > -3\} = \mathbb{R}$. Es decir, ningún número real satisface la primera desigualdad, mientras que cualquiera satisface la segunda.

8. Los valores $x = 2$, $y = -3$ sirven para demostrar ambos hechos. En efecto, con estos valores obtenemos:

$$|x - y| = |2 + 3| = 5 \quad \text{pero} \quad |x| - |y| = 2 - 3 = -1,$$

y también

$$|x + y| = |2 - 3| = 1 \quad \text{pero} \quad |x| + |y| = 2 + 3 = 5.$$

9. **(a)** $|-x + 1| = |x - 1|$ ✓ $|-x + 1| = |-x - 1|$ $|-x + 1| = |x + 1|$

(b) $|x + 3| = |x| + 3$ $|x + 3| \leq |x| + 3$ ✓ $|x + 3| \leq x + 3$

(c) $|2x - 3| \leq |2x| - 3$ $|2x - 3| \leq 2x + 3$ $|2x - 3| \leq |2x| + 3$ ✓

(d) $|3x - 6| = 3|x - 6|$ $|3x - 6| = 3|x - 2|$ ✓ $|3x - 6| = -3|-x + 2|$

10. **(a)** La distancia entre 2 y -4 es $|2 + 4|$.

(b) La distancia entre -3 y -6 es $|-3 + 6|$.

11. Usando la fórmula obtenida en el Ejemplo 44, obtenemos una cota para la distancia entre las casas de Zoe y Mateo:

$$|Z - M| \leq |Z - J| + |J - M| \leq 5 + 2 = 7.$$

Hemos usado la inicial del nombre para indicar la ubicación de cada casa. Entonces, la mayor distancia posible entre las casas de Zoe y Mateo es de 7 cuadras. Gráficamente, esta situación se da cuando las casas de Zoe y Mateo se encuentran en extremos opuestos, y la de Jenaro entre ellas.

12.

$$\sqrt[6]{(-3)^6} = 3, \qquad \sqrt[5]{(-3)^5} = -3, \qquad \sqrt[8]{x^8} = |x|, \qquad \sqrt[3]{x^3} = x.$$

13. **(a)** $x = -5$, $y = 3$: $x < y$ pero $|x| \not< |y|$.

(b) $x = -2$, $y = -3$: $|x| < |y|$ pero $x \not< y$.

(c) $x = -2$, $y = 3$, $z = -8$: $|x| < |y|$ pero $|x + z| \not< |y + z|$ (pues $|x + z| = |-2 - 8| = 10$ y $|y + z| = |3 - 8| = 5$).

Capítulo 3

Sección 3.1

1. **(a)** Sí. Grado 5, coeficiente principal π.

(b) No.

(c) Sí. Grado 6, coeficiente principal -1.

(d) No.

2. **(a)** $p(x) = -3x^5 + 0x^4 + 0x^3 + ex^2 + 0x + 4$

(b) $q(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 + x + 0$

(c) $r(x) = -3x^2 + x + 7$

3. **(a)** Binomio.

(b) Trinomio.

(c) Monomio.

(d) Cuatrinomio.

(e) Monomio.

4. **(a)** $-1, 2$

(b) $-24, 0$

(c) $96, \frac{3}{2}$

(d) $97, -2$

(e) $\sqrt{5}, \sqrt{5}$

5. **(a)** $c = 2$ sí, $c = 0$ no, $c = -4$ sí.

(b) $c = 0$ no, $c = -1$ no, $c = 5$ sí.

(c) No, ya que $c^2 + 1$ es siempre positivo, para cualquier $c \in \mathbb{R}$.

Subsección 3.2.1

1. **(a)** $(p - r - s)(x) = 2x^5 - 5x^3 - 4x^2 - 2$

(b) $(p + p)(x) = 2x^5 + 4x^4 - 10x^3 - 6x^2$

(c) $(s - r + q)(x) = x^5 + x^3 + x^2 - 3x$

(d) $(q+p+s)(x) = x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 3x + 2$

(e) $(p-q)(x) = x^5 + 4x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ y $(q-p)(x) = -x^5 - 4x^4 + 6x^3 + 3x^2 - 3x + 2$. Los resultados corresponden a polinomios opuestos entre sí. Es decir, $p - q = -(q - p)$.

2. $\mathrm{gr}(p+s) = 5$, $\mathrm{gr}(q+s) = 3$, $\mathrm{gr}(r+s) = 5$. No existe una regla sobre el grado de la suma de polinomios.

3. El perímetro, en cm, está dado por $p(x) = 4x^2 + 2x$, el cual cuando $x = 2$ vale $p(x) = 20$ cm.

Subsección 3.2.2

1. El resultado en ambos casos es $3x^3 - 3x^2 + 3x - 3$.

2. 17

3. 16

4. **(a)** $-x^7$

(b) $9x^6 - 3x^5 - 3x^4 - 6x^3 + 11x^2 - x - 3$

(c) $x^8 + x^7 - 2x^5 - x^4 - x^3 + 2x$

(d) $x^5 + 5x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 20x - 24$

(e) $-x^5 + 8x^3 - 12x$

5. **(a)** $x^2 + 14x + 49$

(b) $4x^2 - 12x + 9$

(c) $x^6 + 2x^3 + 1$

(d) $x^3 - 12x^2 + 48x - 64$

(e) $\frac{1}{8}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + \frac{27}{2}x + 27$

(f) $z^6 - 3z^4 + 3z^2 - 1$

(g) $t^2 - 49$

(h) $16x^2 - c^2$

(i) $x - 3$

(j) $x^4 - \pi^2$

(k) $x^4 + 6x^3 + 5x^2 - 24x - 36$

Subsección 3.2.3

1. **(a)** $3x^4$ **(b)** $-\frac{2}{3}x$ **(c)** $\sqrt{2}$

2. 5

3. $\left(-\frac{1}{2}x^2 + 5x + 1\right)(2 - 4x^2 + 2x^3) + (5x^2 - 10x + 10) =$
$= -x^5 + 12x^4 - 18x^3 + 12.$

4. Se indica el resultado, la verificación queda a cargo del lector.

(a) Cociente: $6x - 8$, resto: $-4x + 15$.

(b) Cociente: $x + 5$, resto: 0.

(c) Cociente: $4x^2$, resto: $4x^2 + 1$.

(d) Cociente: $3x^3 - x^2 + 5x - 2$, resto: $10x - 5$.

5. Se indica el resultado, la verificación queda a cargo del lector.

(a) Cociente: $6x^3 + 20x^2 + 30x + 68$, resto: 134.

(b) Cociente: $x^3 + 2x^2 + 14x + 73$, resto: 360.

(c) Cociente: $-3x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 2x + 2$, resto: -4.

(d) Cociente: $6x^3 - 15x^2 + 30x - 60$, resto: 123.

6. **(a)** Cociente: $2x^3 - 6x^2 + 15x - 43$, resto: 126.

(b) Cociente: $x^2 + 4x + 4$, resto: 0.

Sección 3.3

1. **(a)** $(2x + 7)(2x - 7)$

(b) $(t^4 + \sqrt{6})(t^4 - \sqrt{6})$

(c) $(5x^3 + 3)(5x^3 - 3)$

(d) $(6x + 5)(6x - 5)$

2. **(a)** $(x - 4)^2$

(b) $(3x - 2)^2$

(c) $(2x^2 + 3)^2$

(d) $(t^2 - 3t)^2$

3. **(a)** $(2x - 3)^3$

(b) $(x^2 + 2)^3$

(c) $(-x + 1)^3$

(d) $(2t^2 - 1)^3$

4. $m = 8$

5. $k = 3$

6. Notar que $p(1) = 0$, por lo que $(x - 1)$ es factor de p. Dividiendo se obtiene $p(x) = (x - 1)(4x^2 + 2)$.

7. $3x^2(x - 2)(x + 2)$

8. $3x^2(x^2 + 5)$

9. $(x-1)(x^2+4)$

10. $(2x-3)(2x+3)(x-1)$ o bien $4\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-1)$

11. $x(x^2+x+1)(x-3)$

12. $(x^2+1)(x+2)(x-4)$

13. $2(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+1)$ o bien $(x+2)\,(2x-3)\,(x+1)$

14. $(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$

15. $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

16. $(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$

17. $4(x-2)(x+2)(x^2+4)$

18. $3(x+2)\left(x-\frac{5}{3}\right)(x^2+4)$ o bien $(x+2)(3x-5)(x^2+4)$

19. $x^4(2x+1)(x-3)$ o bien $2x^4\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-3)$

20. $(x-1)(x+2)(x+5)(x-4)$

Sección 3.4

1. $x = 1$ funciona para los tres casos. De hecho, casi cualquier valor va a funcionar.

2. **(a)** $\frac{x-1}{x+2}$, $x \neq -2, x \neq -1$

(b) $\frac{x-1}{x+1}$, $x \neq 2, x \neq -1$

(c) $\frac{x-3}{x+1}$, $x \neq \pm 1, x \neq 2$

(d) $\frac{2x-1}{2x+1}$, $x \neq -\frac{1}{2}$

3. 

4. **(a)** $\frac{x^3-3x-10}{x^2-7x+10}$, $x \neq 5, x \neq 2$

(b) $\frac{3(x-1)}{x+1}$, $x \neq \pm 1$

(c) $\frac{x(x+6)}{x^2-1}$, $x \neq \pm 1$

(d) $\frac{3x^2-15x-4}{27x^3-36x^2-48x+64}$, $x \neq \pm\frac{4}{3}$

(e) $\frac{7x-6}{2(x^2-4)}$, $x \neq \pm 2$

(f) $\frac{1}{x}$, $x \neq 0$

(g) $\frac{2(x^2+4)}{x^2-4}$, $x \neq \pm 2$

(h) $\frac{2}{x+1}$, $x \neq \pm 1$

Capítulo 4

Sección 4.1

1. Sea x el precio del kilo de limones, en pesos. Entonces el kilo de manzanas cuesta $2x$, y la igualdad resultante es

$$3(2x) + 5x = 165,$$

o equivalentemente $11x = 165$. También puede plantearse con dos incógnitas como

$$3y + 5x = 165, \qquad y = 2x,$$

siendo y el precio del kilo de manzanas, en pesos.

2. Sea x la cantidad que recibe el hermano mayor, en pesos. Entonces el hermano del medio recibe $x/2$ y el pequeño recibe $x/8$. Luego, debe valer la siguiente igualdad:

$$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{8} = 1300.$$

3. Sea V la cantidad de visitantes. Entonces la cantidad de locales es $V + 4800$, y el enunciado establece que

$$V + (V + 4800) = 43200,$$

o equivalentemente $2V + 4800 = 43200$.

4. Sea x la capacidad del bidón, en litros. Entonces el problema establece que

$$\tfrac{1}{8}x + 38 = \tfrac{3}{5}x.$$

5. Sea x la cantidad de litros que tenía Agustín en el tanque. Entonces x satisface

$$\tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{2}\left(x - \tfrac{2}{3}x\right) = 20.$$

Sección 4.2

1. **Ejemplo 82:** el número es 56.

Ejemplo 83: viajan 50 uruguayos, 90 chilenos y 280 argentinos.

2. **Ejercicio 1:** el kilo de manzanas cuesta \$30, y el de limones cuesta \$15.

Ejercicio 2: el mayor recibe \$800, el del medio \$400, y el pequeño \$100.

Ejercicio 3: hay 24000 locales y 19200 visitantes.

Ejercicio 4: la capacidad del bidón es de 80 litros.

Ejercicio 5: tenía 24 litros en el tanque.

3. $x = -2$ (o bien $S = \{-2\}$)

4. $x = 8$

5. $y = -1$

6. $x = -13$

7. $x = 1$

8. $S = \{-5, 11\}$

9. $S = \varnothing$

10. $S = \{-3, 0, 5, 8\}$

11. $S = \left\{-7, -\frac{1}{3}\right\}$

12. $x = \frac{17}{4}$

13. $x = \frac{5}{2}$

14. $x = 1$

15. $x = -3$

16. $x = -\frac{1}{3}$

17. $x = \frac{1}{3}$

18. $S = \varnothing$ (pues $x = -2$ es no permitido)

19. $S = \{-2, 7\}$

20. $x = 2$ ($x = -4$ es no permitido)

21. $x = 3$ (la base debe ser positiva)

22. $x = 2$ ($x = -8$ es no permitido)

23. $x = \frac{8}{7}$

24. $x = 6$

25. **(a)** $S = \{-2, 1, 3\}$
(b) $S = \{-2, 0, 3\}$
(c) $S = \{-5, 5\}$
(d) $S = \{1, 2\}$
(e) $S = \{-3, 4\}$

26. 

27. La ecuación es $4000 + 120x = 8440$, siendo x la cantidad de discos vendidos en el último mes. Solución: $x = 37$. Luego, Cintia vendió 37 discos en el último mes.

28. Si x es el número buscado, la ecuación es $81x = x + 154000$.
Solución: $x = 1925$. Es decir, el número buscado es 1925.

29. Sea x el menor de los tres números buscados. Entonces debe satisfacer la ecuación $x + (x + 2) + (x + 4) = 99$. Solución: $x = 31$, y los dos impares siguientes son $x + 2 = 33$ y $x + 4 = 35$. Luego, los tres números buscados son 31, 33 y 35, por lo que la suma de los dos mayores es igual a 68.

30. Si x es la cantidad de locales, entonces la ecuación es

$$x + \frac{5}{12}x = 3400,$$

pues $\frac{10}{24} = \frac{5}{12}$. Solución: $x = 2400$. Por lo tanto, asistieron 2400 locales.

31. Sea x la edad de José (y Franco). Entonces la edad de Francisco es $\frac{x}{2} + 3$ y la de Luciano es $\frac{x}{2} + 7$, por lo que la ecuación es

$$x + x + \frac{x}{2} + 3 + \frac{x}{2} + 7 = 46.$$

Solución: $x = 12$. Entonces José y Franco tienen 12 años, Francisco tiene 9 años, y Luciano tiene 13 años.

Sección 4.3

1. **(a)** $S = \{-6, 6\}$
(b) $S = \varnothing$
(c) $S = \{0, 2\}$
(d) $S = \{0, 1\}$
(e) $S = \{0\}$ ($x = 1$ es no permitido)

2. $c = 16$

3. **(a)** $(x-1)^2 + 4$ **(b)** $(x+2)^2 - 3$ **(c)** $-2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}$

4. **(a)** $S = \{-3, 2\}$
(b) $S = \{-2\}$
(c) $S = \varnothing$
(d) $S = \{-1, 4\}$

5. **(a)** $S = \{-5\}$ **(b)** $S = \{-4, 1\}$ **(c)** $S = \varnothing$

6. **(a)** $S = \left\{0, -\frac{3}{2}\right\}$
(b) $S = \left\{1, -\frac{1}{10}\right\}$
(c) $S = \{-3, 1\}$
(d) $S = \{-3\}$ ($x = 1$ es no permitido)
(e) $S = \{5\}$ ($x = 1$ es ficticia)
(f) $S = \{1\}$
(g) $S = \{0, 2\}$
(h) $S = \{1\}$ ($x = 0$ y $x = -\frac{1}{2}$ son no permitidos)

7. **(a)** $\Delta > 0$: 2 soluciones.
(b) $\Delta < 0$: sin soluciones.
(c) $\Delta = 0$: solución única.

8. $a = 16$

9. **(a)** $p(x) = (x+2)(x+4)$
(b) $q(x) = 3(x+2)(x-1)$
(c) $r(x) = (x+9)(x-7)$

10. La base mide 38 cm, y la altura 36 cm (la solución negativa se descarta por el contexto).

11. El número buscado es 8.

12. Los números son 7 y 8.

13. Los números son 6 y 8.

14. Los números son 13 y 15.

15. El joven tenía 22 años (la solución $x = 4$ se descarta por ser menor de edad).

Sección 4.4

1. **Ejemplo 84**: $x = 3$, $y = 9$ (longitudes de los lados del rectángulo).
Ejemplo 85: 12 y 52 años.

2. **(a)** $x = 3$, $y = 1$. Compatible determinado.
(b) Sin solución. Incompatible.
(c) $x = 3$, $y = 2$. Compatible determinado.
(d) Infinitas soluciones. Compatible indeterminado.

3. **(a)** $x = -2$, $y = 5$. Compatible determinado.
(b) Infinitas soluciones. Compatible indeterminado.
(c) $x = 4$, $y = -1$. Compatible determinado.
(d) Sin solución. Incompatible.

4. Los números son 13 y 27.

5. Carolina tiene hoy 45 años y José tiene 15. Así, Carolina tiene 30 años más que su hijo José.

6. Los lados miden 6 y 4 cm.

7. Se vendieron 23 cajas de frutillas pequeñas y 38 de frutillas grandes.

8. Clara tiene 4 años y Franco tiene 12.

9. Asistieron 95 adultos y 153 niños.

10. Hay 17 motos y 42 autos.

11. Tienen 23 días de plazo y les encargaron 5900 valijas.

12. La contraseña es 187543.

13. Entregó 7 billetes de 5 pesos y 3 de 50 pesos.

14. Debe poner 600 gramos del que cuesta \$6 y 400 gramos del que cuesta \$8.50.

15. Denotemos con x al *par* de etiquetas, y con y al lápiz. Entonces el sistema es
$$\begin{cases} 3x - y &= 7 \\ 2y + 2x &= 18. \end{cases}$$
Su solución es $x = 4$, $y = 5$. Luego:

(a) $5 - 4 \cdot 4 = -11$, **(b)** $2 + 5 \cdot 4 = 22$ (hay *una* etiqueta).

Sección 4.5

1. $S = \{x \in \mathbb{N} : 24 < x < 28\} = \{25, 26, 27\}$.

2. A partir de 17 unidades.

3. A partir de 601 unidades.

4. $S = \left(-\infty, \frac{6}{5}\right]$

5. $S = (-\infty, 4)$

6. $S = (-\infty, \infty)$

7. $S = \varnothing$

8. $S = \left(-\infty, \frac{8}{5}\right) \cup (2, \infty)$

9. $S = \left[-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right]$

10. $S = (-\infty, -5) \cup (3, \infty)$

11. $S = (-\infty, -2] \cup [8, \infty)$

12. $S = [-3, 2]$

13. $S = (-\infty, -7) \cup (2, 5)$

14. $S = [2, 7]$

15. $S = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

16. $S = [1, \infty)$

17. $S = (2, 4)$

18. $S = [11, \infty)$

19. $S = (-\infty, -1]$

20. $S = [3, \infty)$

21. $S = \left(\frac{5}{3}, 2\right)$

22. $S = [-2, 2]$

23. $S = (-\infty, -3] \cup (1, 3]$

24. $S = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

25. $S = (-\infty, -2) \cup [1, 2) \cup (2, \infty)$

26. **(a)** $S = (-2, -1)$

(b) $S = [-2, 1] \cup [3, \infty)$

(c) $S = (-\infty, 5]$

(d) $S = (-3, 0) \cup (3, \infty)$

27. 

Capítulo 5

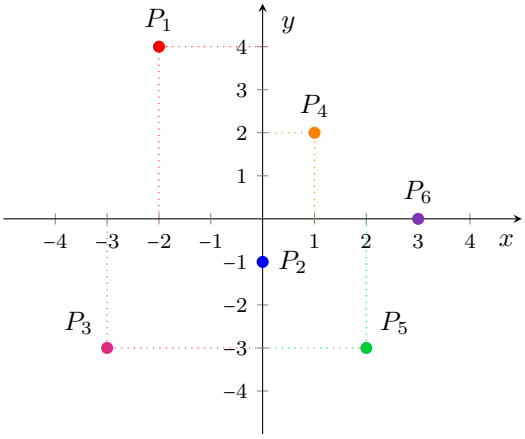
Sección 5.1

1. Sea $f(2) = -9$, $f(0) = 5$ y $f(-1) = 6$.

2. $\mathrm{Dom}(g) = [2, \infty)$. Por ejemplo, si $c = 3$ entonces $g(c) = \sqrt{3}$.

3. **(a)** $\mathbb{R} - \{8\}$ **(c)** $\mathbb{R} - \{-6, -5, -4\}$
(b) $(-\infty, 4] - \{-1, 0\}$ **(d)** $(-1, 0) \cup (0, \infty)$

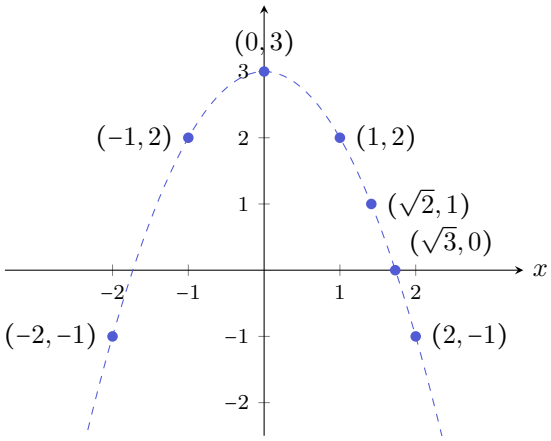
4. Los puntos se ubican en el siguiente gráfico:



5. **(a)** Segundo. **(c)** Cuarto.
(b) Primero. **(d)** Tercero.

6. Universidad = $(0, 3)$ Hospital = $(-2, -3)$ Fábrica = $(-1, 1)$
Shopping = $(4, 0)$ Cafetería = $(-4, -2)$ Banco = $(-3, 2)$
Bar de tragos = $(-2, 4)$ Autobús = $(4, 2)$ Puerto = $(4, -4)$
Supermercado = $(2, 2)$ Telefónica = $(2, -3)$ Hotel = $(3, -2)$
Comedor = $(3, 4)$ Aeropuerto = $(-4, 3)$ Correo = $(-3, 0)$

7. El gráfico es el siguiente:



8.
- f: Corresponde al gráfico de una función. $\text{Img}(f) = [-2, 2]$. Raíces: x_0, x_1 y x_2.
- g: No corresponde al gráfico de una función. No se cumple ni existencia ni unicidad de imagen.
- h: No corresponde al gráfico de una función. No se cumple la unicidad de imagen.
- w: Corresponde al gráfico de una función. $\text{Img}(w) = \left[-\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right]$. Raíces: -1 y 1.

9.
(a) $x = -6$, $x = 5$
(b) $x = -2$ ($2 \notin \text{Dom}(g)$)
(c) $x = -5$, $x = 5$
(d) $x = -3$, $x = 1$
(e) $x = 2$ ($-2 \notin \text{Dom}(h)$)
(f) $x = 3$ ($-3 \notin \text{Dom}(w)$, $1 \notin \text{Dom}(w)$)

10.

11.
(a) $f(1) = 3$
(b) $f(5) = 6$
(c) $x = 3$
(d) $x = 0$, $x = 2$ y $x = 4$
(e) Dos raíces.
(f) Dos valores.
(g) No.

12. **(a)** Corresponde al período 2009–2013 para , y 2004–2008 para .

(b) 2012: 200 millones de usuarios; 2013: 400 millones de usuarios.

(c) 2007: 60 millones de usuarios; 2008: 150 millones de usuarios.

(d) En el año 2012.

(e) 120 millones; 40 millones.

13. **(a)** 2200 millones; 1500 millones; 800 millones; 350 millones; 200 millones.

(b) Tenía 450 millones de usuarios, y pasa aproximadamente un año y medio hasta que se duplica esta cantidad.

(c) Facebook alcanza los 1400 millones de usuarios a fines del año 2014. En ese momento, WhatsApp tiene alrededor de la mitad de usuarios, mientras que Instagram y Twitter tienen aproximadamente la cuarta parte.

(d) La cantidad de usuarios de Instagram comienza a superar a la de usuarios de Twitter a fines de 2014, con aproximadamente 300 millones de usuarios.

(e) En el período no alcanzaron los 800 millones de usuarios Snapchat y Twitter. Los superaron Facebook y WhatsApp.

(f) Facebook al terminar 2013, y WhatsApp al terminar 2016 (alcanzan los 1200 millones de usuarios).

14. Las cantidades aproximadas son:

(a) 70 millones.

(b) 130 millones.

(c) 150 millones.

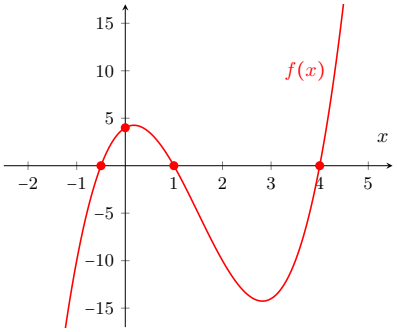
(d) 200 millones.

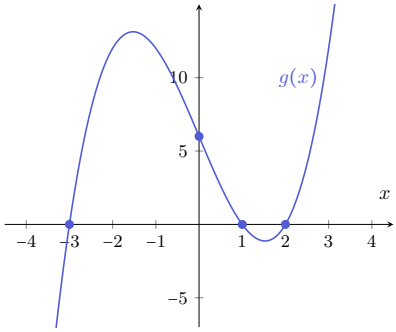
(e) 600 millones.

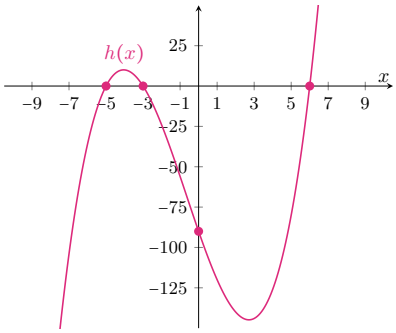
(f) Mediados de 2016.

(g) 400 millones.

15. Las gráficas de las funciones se muestran a continuación. En cada caso, los puntos sobre el eje x son los valores que determinan los intervalos a considerar en la tabla de signos. En todas ellas quedan determinados 4 intervalos. Se incluye también el punto en el que la gráfica "corta" al eje y, el cual corresponde al valor de cada función en $x = 0$.



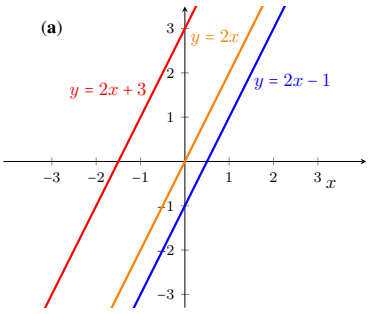


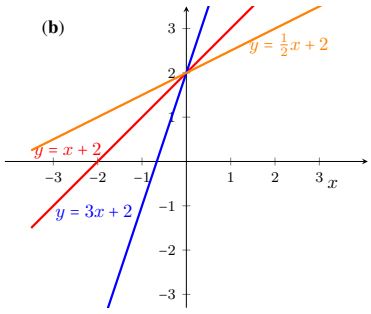


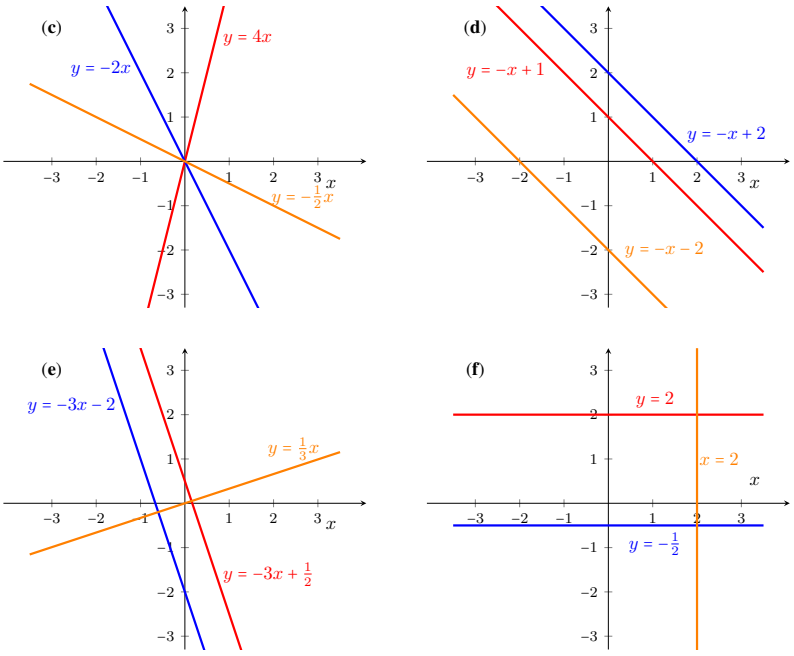
16.

Sección 5.2

1.







2. **(a)** P sí, Q no. **(b)** Ninguno. **(c)** Ambos.

3. **(a)** $y = -3x + 4$ **(c)** $y = -2x + 7$
(b) $y = 5x + 5$ **(d)** $y = -\frac{1}{2}x - 3$

4. **(a)** $y = 2x + 7$ **(b)** $y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$ **(c)** $y = 5x - 18$

5. **(a)** $y = 2x + 2$ **(c)** $y = \frac{1}{2}x + 2$
(b) $y = -x - 1$ **(d)** $y = -3x - 2$

6. **(a)** $a = 3$, $y = 3x + 2$ **(d)** $a = -1$, $y = -x + 2$
(b) $a = -2$, $y = -2x + 4$ **(e)** $a = \frac{3}{2}$, $y = \frac{3}{2}x - 3$
(c) $a = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}x + 3$ **(f)** $a = -\frac{3}{2}$, $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

7.

8. **(a)** $a = -\frac{2}{3}$, $b = -\frac{4}{3}$ **(c)** $a = 6$, $b = \frac{5}{2}$ **(e)** $a = 3$, $b = \pi$
(b) $a = 3$, $b = -4$ **(d)** $a = \frac{1}{3}$, $b = 3$ **(f)** $a = 4$, $b = 5$

9. Las rectas son paralelas porque ambas tienen pendiente igual a 4.

10. **(a)** $y = -4x - 2$ **(c)** $y = -\frac{2}{3}x + 4$ **(e)** $y = -3x + 4$
(b) $y = 3x + 5$ **(d)** $y = \frac{4}{5}x$ **(f)** $y = \frac{1}{2}x + 1$

11. $y = -\frac{4}{3}x - 3$ **12.** $y = -5x + 3$ **13.** 

14. **(a)** $f(x) = 120x + 2300$ (por x horas de trabajo).
(b) Cobrará $\$4700$.
(c) Debe trabajar 180 horas.
(d) El mínimo es 190 horas.

15. **(a)** $f(x) = 0.03x + 25$ (por x metros recorridos).
(b) El costo es de $\$85$.
(c) Podemos recorrer 1.5 km.

16. $C(x) = 20x + 2000$, $I(x) = 50x$, $G(x) = I(x) - C(x) = 30x - 2000$. Debe vender 400 paraguas para obtener una ganancia de $\$10000$.

17. Opción por invitado: $f(x) = 120x$, siendo x la cantidad total de personas que asisten. Opción para socios: $f(x) = 90x + 380$. Si asisten 18 personas conviene la opción para socios, mientras que si asisten 11 conviene pagar por invitado.

18. 25 °C equivalen a 77 °F. 68 °F equivalen a 20 °C.

19. **(a)** $v(t) = \frac{4}{5}t$ (en m/s, t en segundos).
(b) 24 m/s, lo que corresponde a 86.4 km/h.
(c) 60 km/h equivalen a 16.7 m/s aproximadamente. Esta velocidad es alcanzada a los casi 21 segundos.

20. $v(t) = -5t + 40$. Necesita 8 segundos para detenerse por completo ($v(8) = 0$).

21. **(a)** 3.4 segundos. **(b)** -33.3 m/s, aproximadamente.

22. **(a)** Aproximadamente 1 segundo. **(b)** -39.8 m/s.

23. **(a)** 78.4 metros. **(b)** -39.2 m/s.

24. $v_0 = -14.2$ m/s. **25.** $v_0 = 34.3$ m/s; $v_0 = 29.4$ m/s.

26. **(a)** Demora un poco más de 6.16 segundos. Llega con una velocidad aproximada de -30.3 m/s.
(b) Aproximadamente a los 3 segundos.

(c) 47.1 metros.

27. **(a)** $v(t) = -9.8t + v_0$; $y(t) = -4.9t^2 + v_0 t$.
(b) $v_0 \approx 8.85$. Demora poco menos de 1 segundo en llegar a la altura del andamio.

28. **(a)** 15.6 cm **(b)** 0.87 cm **(c)** 1419.23 m

29. 78.4 kg de harina.

30. Al menos 14 respuestas correctas.

31. **(a)** 39 clases. **(b)** 75 % **(c)** Faltó a 18 clases.

32. 18 %

33. Costaba \$750, lo pagó \$600.

34. \$700

35. \$417.45

36. \$111 aproximadamente.

37. 22140 habitantes.

38. \$200000

Sección 5.3

1. $(1, -2)$

2. No, porque son paralelas no coincidentes.

3. (**a**) $(1, 3)$ (**b**) $(0, 2)$

4. Clara tiene 5 años, Matías tiene 2.

5. Consumió 2.8 kilos de bananas, y 0.8 kg de helado de crema.

6. **(a)** $f(x) = 72x + 480$ (socios), $g(x) = 120x$ (no socios).
(b) 10 días de pileta, con un costo de \$1200 mensuales.
(c) Para 6 días de ingreso, no le conviene asociarse. Para 14 días, sí.

7. El estetoscopio cuesta \$450, y el martillo cuesta \$225.

8. Invirtió \$30000 en el que rinde menos, \$15000 en el otro.

9. 133 mililitros de la primera, 867 de la segunda, aproximadamente.

10. Medio litro de cada tarro.

11. 376 entradas para el infantil, 282 para la comedia.

12. 28 kilómetros en el primer tramo, 12 km en el segundo.

13. El código es 17841807.

14. $s_F(t) = 37t$, $s_B(t) = 780 - 28t$. Se intersecan en $(12, 444)$.

15. **(a)** $(3, 1)$
(b) Sin solución.
(c) $(3, 2)$
(d) Infinitas soluciones.

Sección 5.4

1. Cuadrantes 1 y 4, incluyendo al eje y.

2. Cuadrantes 3 y 4, excluyendo al eje x.

3. **(a)** Cuadrante 4.
(b) Cuadrante 3.
(c) Cuadrante 2.
(d) Cuadrante 1.

4. No se incluyen los gráficos aquí, ya que se verifican con GeoGebra en el ejercicio siguiente.

5. 

6. Función a maximizar: $f(x, y) = 65x + 50y$, siendo x los litros de cerveza rubia e y los de cerveza negra. Las restricciones sobre la producción son:

$$\text{Restricciones} \begin{cases} x + 2y & \leq & 30 \\ 2x + y & \leq & 45 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0. \end{cases}$$

La solución óptima es 20 litros de cerveza rubia y 5 litros de cerveza negra produciendo un ingreso de $\$1550$.

7. Función a maximizar: $f(x, y) = 70x + 52y$, siendo x la cantidad de collares e y la de pulseras. Las restricciones sobre la producción son las siguientes:

$$\text{Restricciones} \begin{cases} 15x + 10y & \leq & 150 \\ 4x + 4y & \leq & 48 \\ 0.6x + 0.2y & \leq & 6 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0. \end{cases}$$

La solución óptima es 6 collares y 6 pulseras, produciendo una ganancia de $\$732$.

8. Función a minimizar: $f(x, y) = 30x + 20y$, siendo x la cantidad del Fertilizante 1 e y la del Fertilizante 2. Las restricciones son las siguientes:

$$\text{Restricciones} \begin{cases} 2x + y & \geq & 7 \\ 2x + 2y & \geq & 12 \\ x + 3y & \geq & 10 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0. \end{cases}$$

(a) La solución óptima es 1 litro de Fertilizante 1 y 5 litros de Fertilizante 2, con un costo de \$130.

(b) Se obtiene una mezcla de 6 litros. Posee 7 unidades de N, 12 de P, y 16 de K.

(c) Aproximadamente, cada litro cuesta \$21.67, y contiene 1.17 unidades de N, 2 de P, y 2.67 de K.

(d) El porcentaje aproximado de cada fertilizante en esta mezcla es de $16.67\,\%$ del primero y $83.33\,\%$ del segundo.

9. Función a maximizar: $f(x, y) = 30x + 50y$, siendo x la cantidad de tazas e y la de mates. Las restricciones sobre la producción son las siguientes:

$$\text{Restricciones} \begin{cases} 2x + 2y & \leq & 500 \\ x + 2y & \leq & 300 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0. \end{cases}$$

La solución óptima es $(200, 50)$ (es decir, 200 tazas y 50 mates), con una ganancia de \$8500.

10. **(a)** A las restricciones del problema anterior se le deben agregar las dos condiciones siguientes:

$$x \leq 130, \quad y \leq 120.$$

(b) En este caso, la solución óptima es 130 tazas y 85 mates, con una ganancia de \$8150.

(c) Sobran 70 calcomanías negras y ninguna de color.

Sección 5.5

1. $y = -2(x + 1)^2 + 8$. Raíces: $x_1 = -3$, $x_2 = 1$. Intersección con el eje y: en $y = 6$. Vértice: $(-1, 8)$. Eje de simetría: $x = -1$.

2. $y = \frac{1}{3}(x - 3)^2$. Raíces: $x_1 = x_2 = 3$. Intersección con el eje y: en $y = 3$. Vértice: $(3, 0)$. Eje de simetría: $x = 3$.

3. $y = (x-2)^2 + 3$. Raíces: no tiene. Intersección con el eje y: en $y = 7$. Vértice: $(2, 3)$. Eje de simetría: $x = 2$.

4. $y = 4(x + 1)^2 - 1$. Raíces: $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$. Intersección con el eje y: en $y = 3$. Vértice: $(-1, -1)$. Eje de simetría: $x = -1$.

5. $y = (x+1)^2 - 3$. Raíces: $x_1 = -1 + \sqrt{3}$, $x_2 = -1 - \sqrt{3}$. Intersección con el eje y: en $y = -2$. Vértice: $(-1, -3)$. Eje de simetría: $x = -1$.

6. $y = x^2 + 4$. Raíces: no tiene. Intersección con el eje y: en $y = 4$. Vértice: $(0, 4)$. Eje de simetría: $x = 0$.

7. $y = x^2 - 4$. Raíces: $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. Intersección con el eje y: en $y = -4$. Vértice: $(0, -4)$. Eje de simetría: $x = 0$.

8. $y = 4\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - 1$. Raíces: $x_1 = -2$, $x_2 = -1$. Intersección con el eje y: en $y = 8$. Vértice: $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$. Eje de simetría: $x = -\frac{3}{2}$.

9. $y = (x + 1)^2 - 1$. Raíces: $x_1 = -2$, $x_2 = 0$. Intersección con el eje y: en $y = 0$. Vértice: $(-1, -1)$. Eje de simetría: $x = -1$.

10. $y = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}$. Raíces: $x_1 = -3$, $x_2 = 2$. Intersección con el eje y: en $y = 6$. Vértice: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right)$. Eje de simetría: $x = -\frac{1}{2}$.

11. $y = \frac{1}{2}(x + 1)(x - 3)$

12. $y = \frac{1}{2}(x - 1)(x + 3)$

13. $y = -3(x - 2)^2$

14. $y = 2(x - 1)(x + 4)$

15. $y = -2(x - 1)(x - 3)$

16. $y = 4(x + 3)^2$

17. Las relaciones son: $g(x) = f(2x)$, $h(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$.

18. **(a)** 90 cm^2.

(b) $a(x) = x^2 + (12 - x)^2 = 2x^2 - 24x + 144$ (en cm^2).

(c) No, $2x^2 - 24x + 144 = 70$ no tiene solución.

(d) 4 y 8 cm.

(e) $a(x) < 80$ si y solo si $x \in (4, 8)$, es decir, si el lado de B mide más de 4 cm y menos de 8 cm.

(f) 6 cm, lo que produce un área de 72 cm^2.

19. Ancho: 3 unidades. Alto: 9 unidades.

20. Los números son 10, 11 y 12.

21. Las dimensiones son 20 y 30 metros.

22. Debe ser un cuadrado de 125 metros de lado.

23. Debe producir 15 lámparas, con un costo de $\$555$.

24. **(a)** 300000 pesos.

(b) Mínima 9 artículos, máxima 71 artículos.

(c) Mínima 20 artículos, máxima 60 artículos.

(d) 40 artículos, obteniendo 500000 pesos de ganancia.

25. Alcanza los 122.5 metros, a los 5 segundos del lanzamiento.

26. Demora 4.04 segundos, aproximadamente.

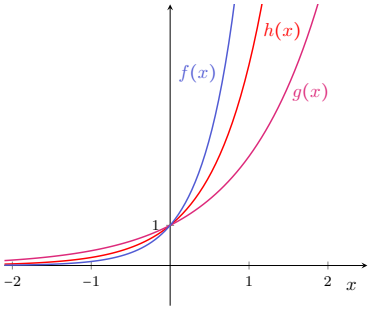
27. La estatua tiene 19.6 metros de altura.

28. **(a)** Altura: 180 metros. Alcanza esta altura nuevamente a los 9 segundos.
(b) Altura: 270 metros.
(c) Altura máxima: 281.15 metros. Alcanza esta altura a los 4.5 segundos.
(d) Demora 12 segundos.
(e) Entre los 2 y 7 segundos.

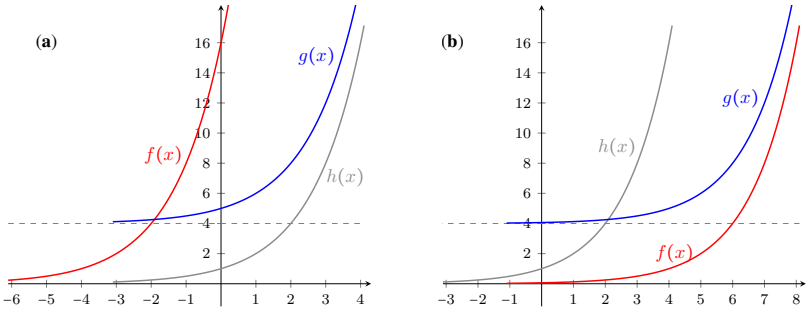
29. **(a)** Altura máxima: 1353.75 pies. Alcanza esta altura a los 1.5 segundos.
(b) Demora 11 segundos.
(c) Altura de la torre: 1320 pies. Alcanza esta altura a los 3 segundos.

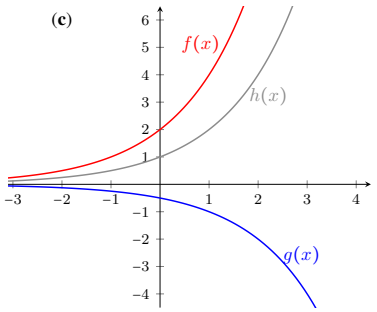
Sección 5.6

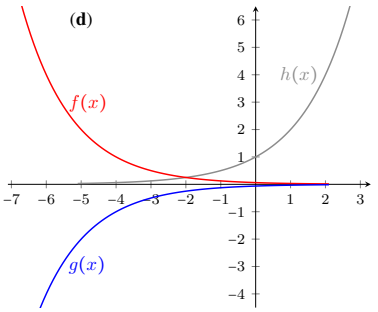
1.



2. Los gráficos son los siguientes:







3. $a = 5$ **4.** $a = 2$ **5.** $c = 3$ **6.** $k = -2$ **7.** $h = 2, k = 1$

8. **(a)** $x = 1$
(b) $x = 7$
(c) $x = \ln 3 \approx 1.1$
(d) $x_1 = -1, x_2 = 2$

9. 

10. $26751.25.

11. **(a)** 19.81 miligramos.
(b) Casi 8 horas (7 horas y 45 minutos).

12. **(a)** 35 ejemplares.
(b) 12.23 años, es decir, aproximadamente 12 años y 3 meses.
(c) Al menos 23 ejemplares.

13. **(a)** $P(t) = 1000e^{3t \ln 2} = 1000 \cdot 8^t$.
(b) 3.32 horas, es decir, aproximadamente 3 horas y 20 minutos.

14. **(a)** $C(t) = 80e^{-0.275t}$ (pues $r = \frac{1}{4} \ln \frac{1}{3}$).
(b) 15.36 miligramos.
(c) Un poco más de 10 horas.

15. Un poco más de 38069 años.

16. Luego de 15 años quedará un 72.9 %. Tarda aproximadamente 43 años y medio en desintegrarse el 60 % del material inicial.

17. Como puede observarse en la tabla siguiente, el capital acumulado es mayor a medida que el valor de n aumenta:

Capitalización	n	Capital acumulado luego de 3 años
Anual	1	\$17280
Semestral	2	\$17715.61
Cuatrimestral	3	\$17875.51
Trimestral	4	\$17958.56
Bimensual	6	\$18043.80
Mensual	12	\$18131.30
Continua	∞	\$18221.19

18. **(a)** $C(t) = 1000\left(1 + \frac{0.22}{2}\right)^{2t} = 1000\,(1.11)^{2t}$

(b) \$1518.10

(c) 3.32 años, lo que equivale a esperar 3 años y 4 meses.

(d) $C_0 \approx 1317.5$

19. $C_0 = 24511.16$ **20.** $C_0 = 54147.15$

21. Las tasas anuales aproximadas son:

(a) 26.7 % **(b)** 21.64 % **(c)** 20 % **(d)** 19.75 %

22. **(a)** $P(t) = 10 \cdot 60^t$

(b) 2160000 moscas.

(c) Poco más de 3 meses.

23. **(a)** 99.66 % **(b)** 0.18 g/l

24. **(a)** 265 abejas. **(b)** 14548 abejas. **(c)** Casi 18 meses.

25. El Banco A.

Sección 5.7

1. Ver Figura R.1 en la página siguiente.

2. **(a)** $\mathrm{Dom}(f) = (-3, 3)$

(b) $\mathrm{Dom}(g) = (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$

(c) $\mathrm{Dom}(h) = \mathbb{R} - \{2\}$

3. **(a)** $\mathrm{Dom}(f) = (-5, \infty)$. Intersección con el eje x: $(-4, 0)$. Intersección con el eje y: $(0, \log 5)$. Asíntota vertical: $x = -5$.

(b) $\mathrm{Dom}(g) = (0, \infty)$. Intersección con el eje x: $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$. Intersección con el eje y: no tiene. Asíntota vertical: $x = 0$.

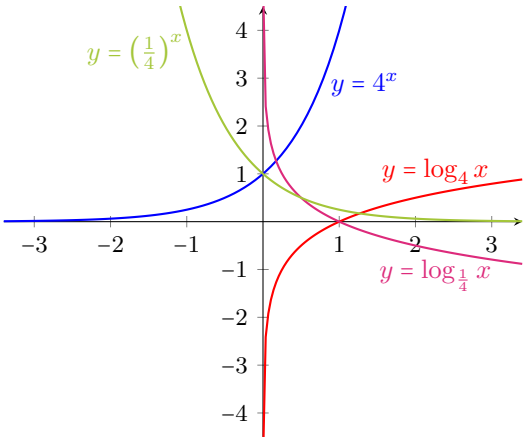


Figura R.1: Gráfico correspondiente al Ejercicio 1.

(c) $\mathrm{Dom}(h) = (2, \infty)$. Intersección con el eje x: $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$. Intersección con el eje y: no tiene. Asíntota vertical: $x = 2$.

(d) $\mathrm{Dom}(s) = (-5, \infty)$. Intersección con el eje x: $(3, 0)$. Intersección con el eje y: $(0, 0.68)$. Asíntota vertical: $x = -5$.

4. $a = \frac{1}{4}$

5. $c = 3$

6. $k = 4$

7. $h = 4$

8. **(a)** $S = \{2, 4\}$

(b) $S = \{17\}$

(c) $S = \{4\}$

(d) $S = \{2\}$

9.

10.

$$g(x) = \log_{\frac{1}{a}} x = \frac{\log_a x}{\log_a \frac{1}{a}} = \frac{\log_a x}{-1} = -\log_a x = -f(x).$$

11. $f(g(x)) = f(x-5) = (x-5)+5 = x$.
Similarmente: $g(f(x)) = g(x+5) = (x+5)-5 = x$.

12. $f(g(x)) = f(x/2) = 2(x/2) = x$.
Similarmente: $g(f(x)) = g(2x) = (2x)/2 = x$.

13. Si $x \geq 0$: $f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$.
Similarmente, para $x \geq 0$: $g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x| = x$.

14. Si $x \geq -5$: $f(g(x)) = f(\sqrt{x+5}) = (\sqrt{x+5})^2 - 5 = x + 5 - 5 = x$.
Similarmente, para $x \geq 0$: $g(f(x)) = g(x^2 - 5) = \sqrt{x^2 - 5 + 5} = |x| = x$.

15. 6.3 veces más intenso.

16. 8.2.

17. 63 veces más intenso.

18. pH= 10.38 (agua básica), por lo que el cloro no hará efecto.

19.

Bebida	pH	H	Clasificación
Jugo de naranja	3	10^{-3}	ácida
Vino promedio	3.5	3.16×10^{-4}	ácida
Cerveza	4.5	3.16×10^{-5}	ácida
Café negro	5	10^{-5}	ácida
Leche	6.5	3.16×10^{-7}	ácida
Agua	7	10^{-7}	neutra
Té verde	7.5	3.16×10^{-8}	básica
Leche de Magnesia	10.5	3.16×10^{-11}	básica

20. Entre 10^{-13} y 10^{-11} moles por litro.

21.

Fuente de sonido	I	N
Despertador	10^{-4}	80
Avión despegando	10	130
Camión de basura	10^{-2}	100
Aspiradora	10^{-5}	70
Bocina	0.1	110
Sonido de fondo en un campo	10^{-9}	30

22.

Objeto Astronómico	m	M	d
Omega Centauri	3.7	–9.89	5212
Betelgeuse	0.42	–6.05	196.79
Vega	0.03	0.58	7.76
Antares	1	–5.28	180
Estrella polar	1.97	–3.63	132

Sección 5.8

1. $C^0 = \{0, 4, 7\}$; $C^+ = (4, 7)$; $C^- = [-2, 0) \cup (0, 4) \cup (7, 8]$; f crece en $[-2, 0]$ y en $[2, 5]$; f decrece en $[0, 2]$ y en $[6, 8]$; f es constante en $[5, 6]$.

2. $C^0 = \{-4, -2, 4, 10\} \cup [6, 8]$; $C^+ = [-5, -4) \cup (-2, 4) \cup (8, 10)$; $C^- = (-4, -2) \cup (4, 6)$; g crece en $[-3, -1]$, $[5, 6]$ y en $[8, 9]$; g decrece en $[-5, -3]$, $[2, 5]$ y en $[9, 10]$; g es constante en $[-1, 2]$ y en $[6, 8]$.

3. $C^0 = \{1, 3, 9\}$; $C^+ = (-\infty, 1) \cup (3, 9)$; $C^- = (1, 3) \cup (9, \infty)$; h crece en $[2, 6]$; h decrece en $(-\infty, 2]$ y en $[6, \infty)$; h no es constante en ningún intervalo.

4. $C^0 = \{1, 3\}$; $C^+ = (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$; $C^- = (1, 3)$; w crece en $[2, 4]$ y en $[6, \infty)$; w decrece en $(-\infty, 2]$ y en $[5, 6]$; w es constante en $[4, 5]$.

5. $x = 0$, $x = 4$ y $x = 8$. La función h no es inyectiva, ya que a 3 valores distintos del dominio les corresponde la misma imagen.

6. $x = 0$, $x = 7$ y todo $x \in [4, 5]$. La función w no es inyectiva, ya que a distintos valores les corresponde la misma imagen.

7. **(a)** f no es biyectiva (no es inyectiva ni sobreyectiva).

(b) g no es biyectiva (es inyectiva pero no es sobreyectiva).

(c) h no es biyectiva (es sobreyectiva pero no es inyectiva).

(d) w es biyectiva.

Capítulo 6

Sección 6.1

1. 17 unidades. **2.**  **3.** 10 unidades.

4. (**a**) $2\sqrt{10} \approx 6.32$ metros. (**b**) $2\sqrt{6} \approx 4.9$ metros.

5. $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{7}{25}$; $\operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{24}{7}$; $\operatorname{cosec}(\beta) = \frac{25}{24}$; $\cos(\beta) = \frac{7}{25}$.

6. (**a**) 360; (**b**) radián.

7. $\alpha \approx 16°15'37'' \approx 0.28$ rad; $\beta \approx 73°44'23'' \approx 1.29$ rad.

8. $\alpha \approx 18°55'29'' \approx 0.33$ rad; $\beta \approx 71°4'31'' \approx 1.24$ rad.

9. 

10. $\cos(\alpha) \approx 0.62$.

11.

α	$\text{tg}(\alpha)$	$\text{cosec}(\alpha)$	$\sec(\alpha)$	$\text{cotg}(\alpha)$
$30° = \frac{\pi}{6}$rad	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$45° = \frac{\pi}{4}$rad	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$60° = \frac{\pi}{3}$rad	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

12. Se apoya aproximadamente a 2.34 metros de altura.

13. La pendiente será de $36°52'12"$, aproximadamente.

14. Aproximadamente, la diagonal mide 4.77 m, y el área del rectángulo es 10.4 m^2.

15. Perímetro aproximado: 251.12 cm. Área aproximada: 2813.44 cm^2.

16. Dos ángulos de $48°$ y uno de $84°$, aproximadamente.

17. (**a**) 65 cm; (**b**) $36°52'12"$; (**c**) 8.92 cm. (Resultados aproximados)

18. (**a**) 5.1 m; (**b**) 3.56 m. (Resultados aproximados)

19. La torre mide aproximadamente 155.88 metros de altura.

20. La altura del edificio es de casi 55 metros.

21. La sombra del árbol mide aproximadamente 13.86 metros.

22. La persona proyecta una sombra de casi 2.6 metros.

Sección 6.2

1. La antena mide 10.39 metros, aproximadamente.

2. La altura del edificio es 171 metros.

3. La altura es de 15 metros aproximadamente (14.99 m).

4. La distancia entre ambos autos es casi 4034 metros.

5. Altura aproximada del monumento: 0.76 m. Superficie aproximada del lago: 1.29 m^2.

6. La altura del pino es 2.20 metros, aproximadamente.

7. La altura aproximada del edificio es 61.47 metros.

Autoevaluaciones

Los Student Birds

- **Nivel 1:**
  - **Desafío 1:** $y(5) = 3.66$
  - **Desafío 2:** $x_1 = 2$, $x_2 = 8$
  - **Desafío 3:** $v_0 = 20$
  - **Desafío 4:** $d = 18$
  - **Desafío 5:** $y_0 = 10$, $x^* = 22.5$
- **Nivel 2:**
  - **Desafío 1:** $v_0 = 21.60$
  - **Desafío 2:** $v_0 = 23.98$
  - **Desafío 3:** $y_0 = 4.81$
  - **Desafío 4:** $d = 25.03$
  - **Desafío 5:** $d = 25.03$
- **Nivel 3:**
  - **Desafío 1:** $P(2) = (28.28, 8.28)$, $x_{\text{max}} = 40$
  - **Desafío 2:** $v_0 = 16$; $t = 2$
  - **Desafío 3:** $\alpha = 80°\ 24'\ 21''$, $y_{\text{max}} = 19.44$, $t_1 \approx 0.6$, $t_2 \approx 3.35$
  - **Desafío 4:** $v_0 = 10$, $x_{\text{max}} = 15.51$, $t = 2$
  - **Desafío 5:** $y_0 = 13.89$, $t_2 \approx 3.63$
- **Nivel 4:**
  - **Desafío 1:** $v_0 = 20$, $t_e = 3$
  - **Desafío 2:** $\alpha = 15°$, $t_e = 2$
  - **Desafío 3:** $v_0 = 20$, $t_e = 4$
  - **Desafío 4:** $y_0 = 17.5$, $t_e = 4$
  - **Desafío 5:** $\alpha = 30°$, $t_e = 0$

El tiro libre

1. $v_0 \approx 23.66$ m/s.
2. Demoró aproximadamente 1.35 segundos.

3 La pelota alcanzó una altura máxima de unos 3.34 metros, a casi 11.64 metros del arco.

4 La pelota pasó sobre la barrera a 2.5 metros de altura, aproximadamente.

El problema de Bart

1 Precio del boleto: $240 - \frac{1}{3}120 = 240 - 40 = 200$ dólares.

2 Luego de la segunda parada en el tren quedan $40-15+51-40+102 = 138$ pasajeros.

3 El tren que va de Santa Fe a Phoenix demora 22 horas y media en llegar, mientras que el que partió de Phoenix demora 18 horas.

4 Los trenes chocan a 400 km de Santa Fe (o equivalentemente, a 500 km de Phoenix), luego de 10 horas de haber partido.

Autoevaluación clásica 1

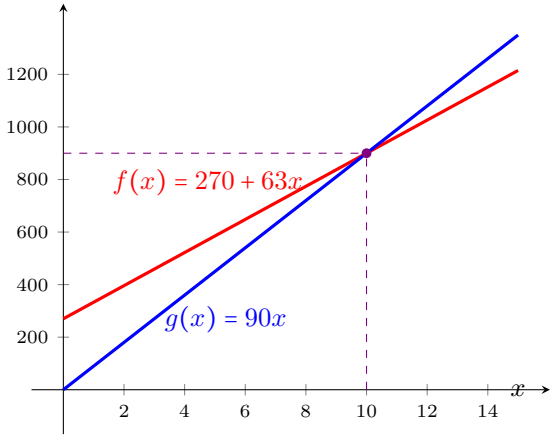
1. **(a)** $S = \{3, 7\}$

(b) $S = \{0\}$ ($x = -3$ es no permitido)

(c) $S = (-5, 3)$

(d) $S = (-\infty, -6] \cup [2, \infty)$

2. **(a)** Socios: $f(x) = 270 + 63x$, siendo x el número de horas mensuales de uso de la cancha. No socios: $g(x) = 90x$.



(b) 10 horas.

(c) 4 horas al mes: conviene no asociarse. 12 horas al mes: conviene asociarse.

3. (a) 35 metros. A los 6 segundos.

(b) 75 metros.

(c) 80 metros, a los 3 segundos.

(d) 7 segundos.

(e) Entre los 2 y 4 segundos.

4. (a) $P(t) = 4000(1.2)^t$. La gráfica tiene la forma de una exponencial con base mayor que uno, expandida verticalmente.

(b) \$9953.28.

(c) Aproximadamente 8 años.

5. (a) Base de 60 cm, lados de 50 cm.

(b) 53°7'48".

(c) Altura aproximada: 35.75 cm. Lados: 46.67 cm, aproximadamente.

Autoevaluación clásica 2

1. (a) $S = (-\infty, -8) \cup (-2, \infty)$

(b) $S = \{5\}$ ($x = 0$ se descarta)

(c) $S = \{-3, -2\}$

(d) $S = [-4, -2] \cup [3, \infty)$

2. (a) Función objetivo a maximizar: $f(x, y) = 30x + 45y$, siendo x la cantidad de macetas pequeñas, e y la cantidad de grandes. Las restricciones sobre la producción son las siguientes:

$$\text{Restricciones} \begin{cases} x + y & \leq & 45 \\ x & \leq & 40 \\ x + 1.5y & \leq & 50 \\ x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \end{cases}$$

El gráfico se encuentra en la Figura R.2.

(b) La solución óptima es pintar 35 macetas pequeñas y 10 macetas grandes (punto B), arrojando un beneficio de \$1500.

3. (a) Velocidad: 9.8 m/s. Altura: 39.2 m. Instante aproximado: 4.02 s.

(b) $t_1 = 1$ segundo, $t_2 = 5$ segundos.

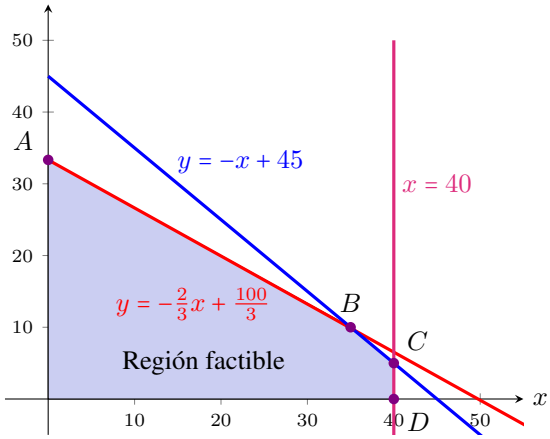


Figura R.2: Gráfico correspondiente al Ejercicio 2a.

(c) 6 segundos.

(d) Altura máxima: 44.1 metros. La alcanza a los 3 segundos.

4. **(a)** $P(t) = 35(1.2)^t$.

(b) 104 aves.

(c) Casi 8 años.

(d) 40 ejemplares.

5. **(a)** Base de 4 metros y altura de 3 metros. Diagonal de 5 metros.

(b) 36°52’12”.

(c) Altura: 2.31 metros. Diagonales: 4.62 metros.